

伝達関数：極と零点

回路関数

回路関数

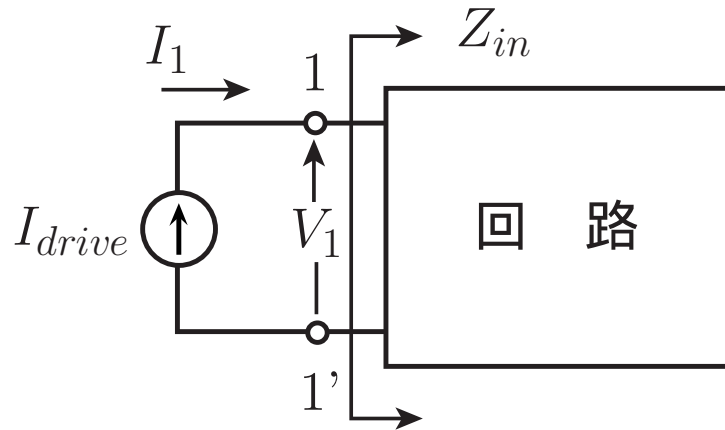
すべての初期値を零とした場合の
入力と出力のラプラス変換の比

極と零点

零点 : 回路関数の分子多項式の解

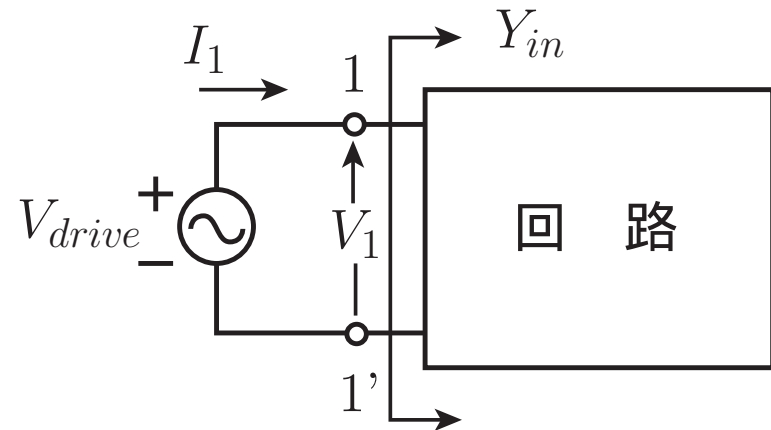
極 : 回路関数の分母多項式の解

回路の安定性



(a)

$$V_1 = Z_{in} I_{drive}$$



(b)

$$I_1 = Y_{in} V_{drive}$$

Z_{in} の極の実部が負ならば安定（開放安定）

Y_{in} の極の実部が負ならば安定（短絡安定）

回路の周波数特性

回路関数 $F(s)$

$$F(s)=F_0\frac{(s-z_1)(s-z_2)\cdots(s-z_m)}{(s-p_1)(s-p_2)\cdots(s-p_n)}$$

$z_i(i=1\sim m)$ は零点, $p_i(i=1\sim n)$ は極

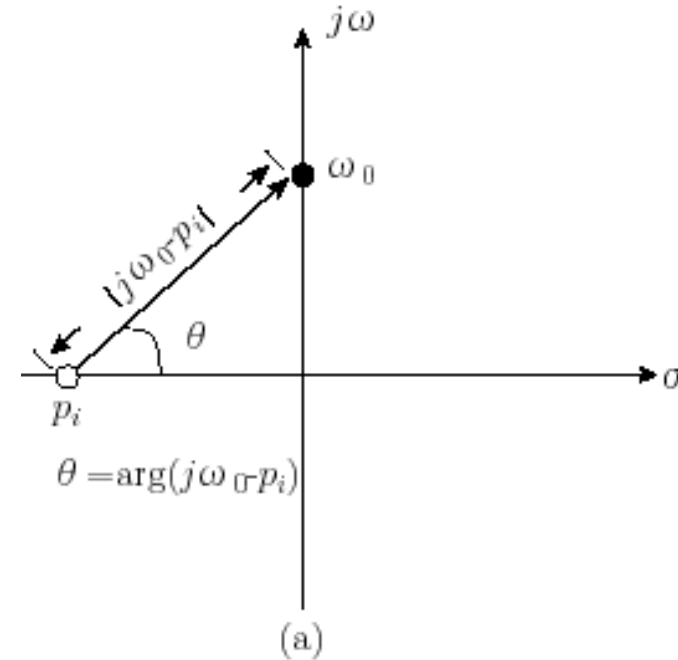
振幅特性 $|F(j\omega)|$

$$|F(j\omega)|=|F_0|\frac{|j\omega-z_1||j\omega-z_2|\cdots|j\omega-z_m|}{|j\omega-p_1||j\omega-p_2|\cdots|j\omega-p_n|}$$

位相特性 $\arg F(j\omega)$

$$\begin{aligned}\arg F(j\omega)=&\arg(j\omega-z_1)+\arg(j\omega-z_2)+\cdots+\arg(j\omega-z_m) \\ &-\arg(j\omega-p_1)-\arg(j\omega-p_2)-\cdots-\arg(j\omega-p_n)\end{aligned}$$

実極と周波数特性



$\omega_0=0$ (直流) のとき

$|j\omega_0 - p_i|$: 最小

$\arg(j\omega_0 - p_i) = 0^\circ$



単調増加

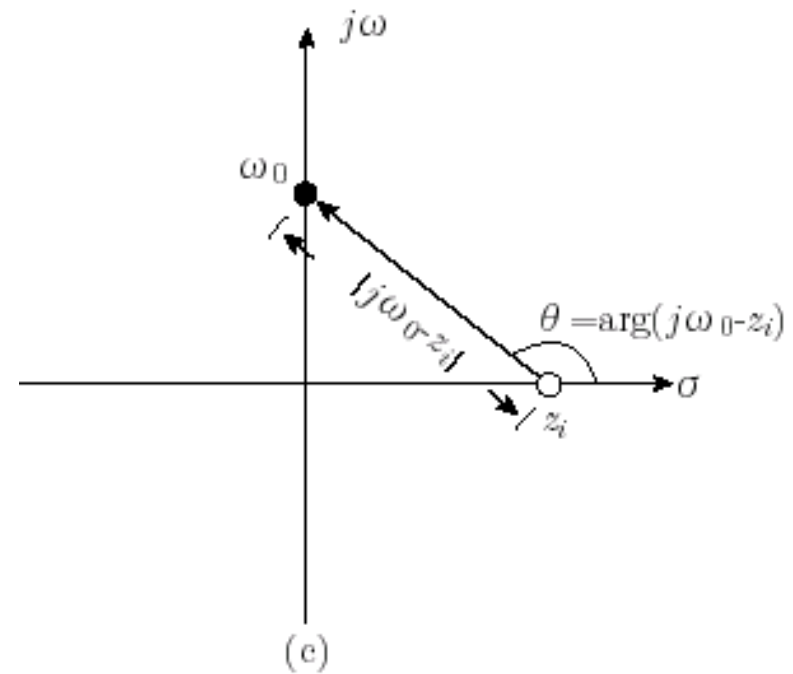


$\omega_0=\infty$ のとき

$|j\omega_0 - p_i|$: 無限大

$\arg(j\omega_0 - p_i) = 90^\circ$

実零点と周波数特性



$|j\omega_0 - z_i|$ の動き $|j\omega_0 - p_i|$ と同じ

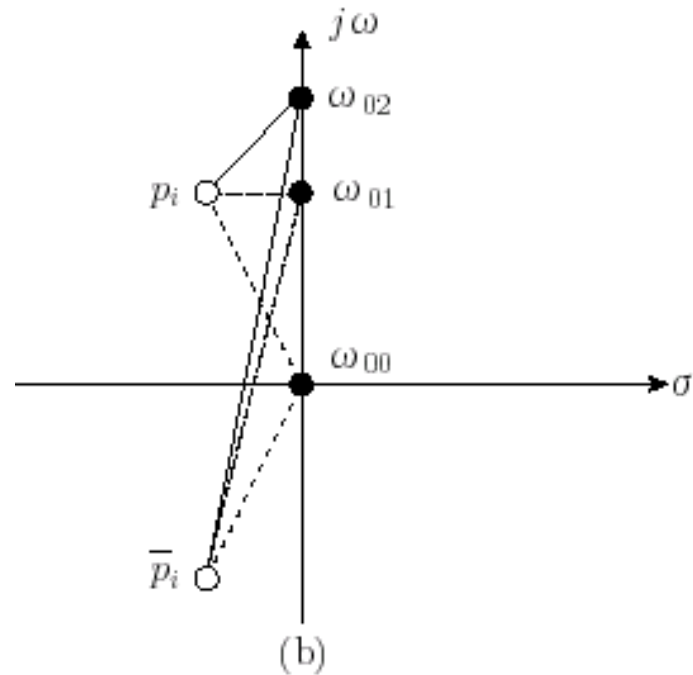
$\omega_0=0$ のとき

$$\arg(j\omega_0 - z_i) = 180^\circ$$

$\omega_0=\infty$ のとき

$$\arg(j\omega_0 - z_i) = 90^\circ$$

複素極と周波数特性

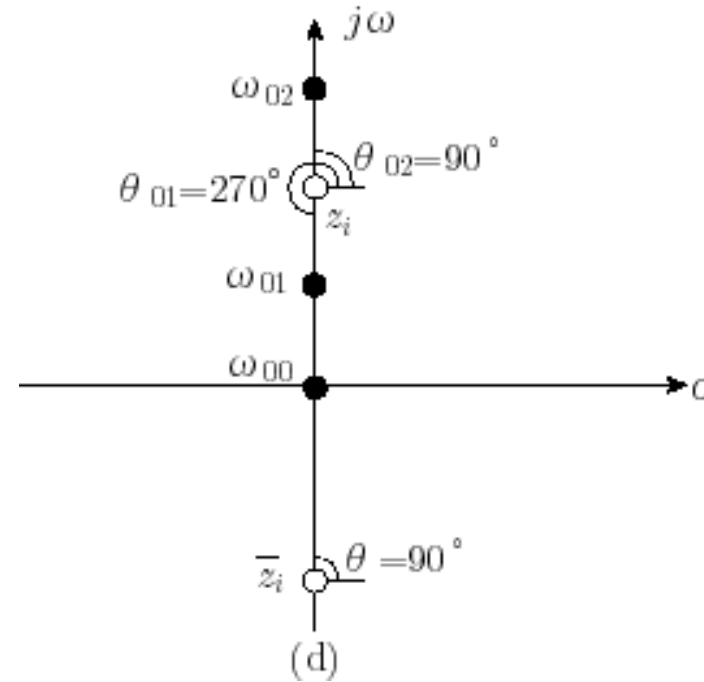


振幅特性: $|j\omega_0 - p_i| |j\omega_0 - \bar{p}_i|$

位相特性: $\arg(j\omega_0 - p_i) + \arg(j\omega_0 - \bar{p}_i)$

複素零点と周波数特性

$$\arg(j\omega_0 - \bar{z}_i) = 90^\circ$$



$$\omega_0 < |z_i|$$

$$\omega_0 = |z_i|$$

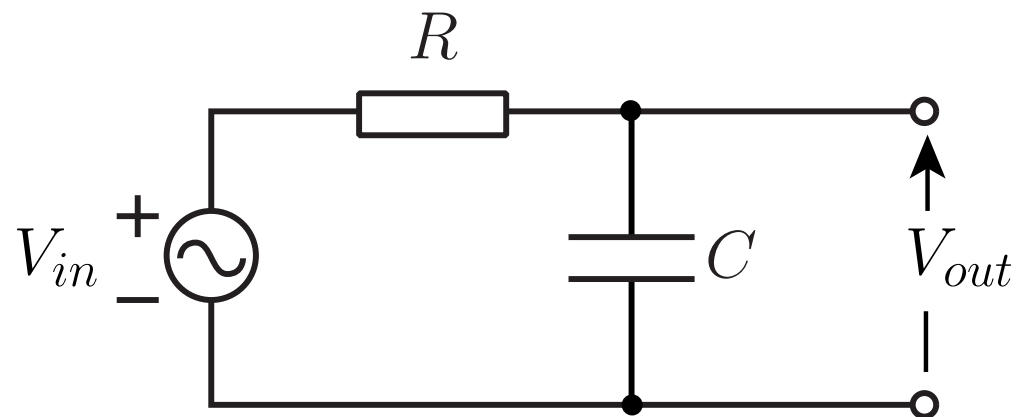
$$\omega_0 > |z_i|$$

$$\arg(j\omega_0 - z_i) = 270^\circ$$

——

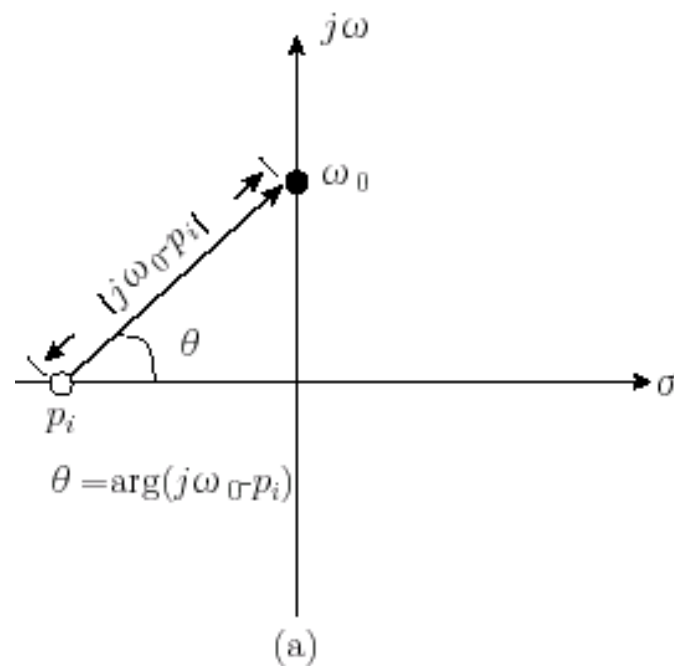
$$\arg(j\omega_0 - z_i) = 90^\circ$$

受動RC回路の周波数特性例(1)

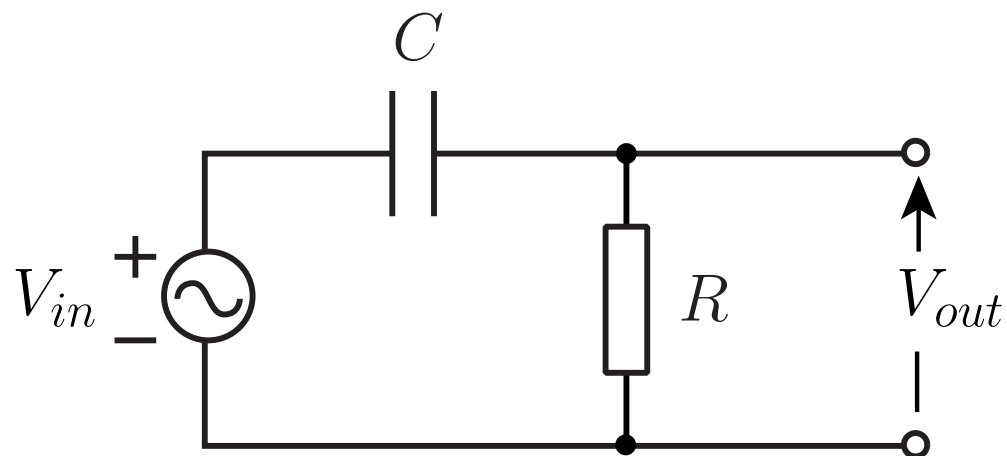


$$T_a(s) = \frac{1}{1 + sCR}$$

$\frac{-1}{CR}$ に極

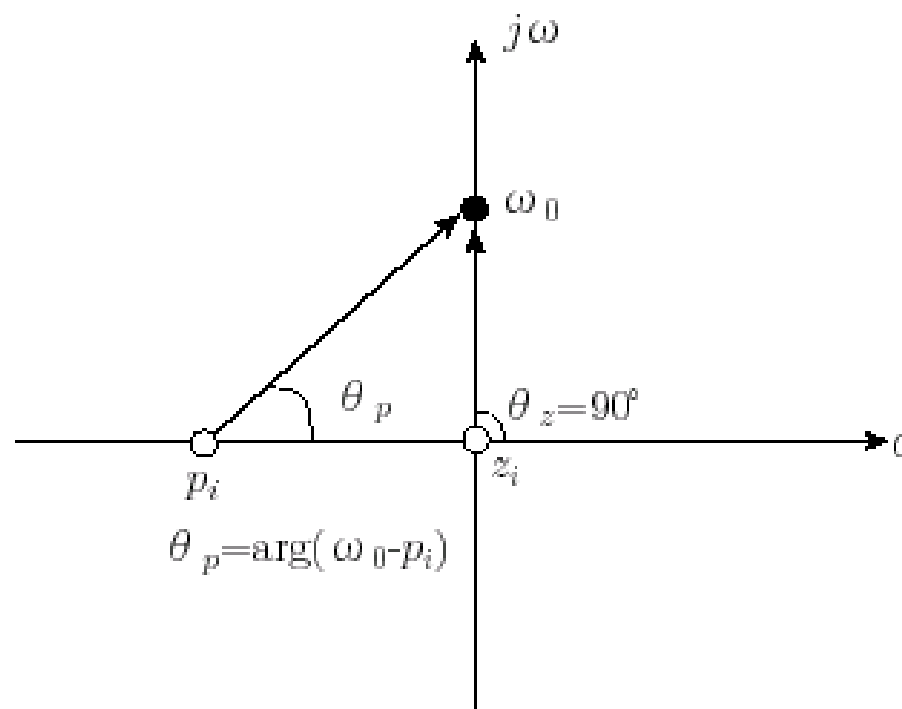


受動RC回路の周波数特性例(2)



$$T_b(s) = \frac{sCR}{1+sCR}$$

直流に零点, $\frac{-1}{CR}$ に極



複数の極や零点を有する伝達関数の場合

$$T(s) = \frac{(s - z_1)}{(s - p_1)(s - p_2)}$$

$|p_1| \ll |z_1| \ll |p_2|$ と仮定

$\omega \approx |p_1|$ のとき $\omega/|z_1| \ll 1, \quad \omega/|p_2| \ll 1$ なので

$$T(j\omega) = \frac{(j\omega - z_1)}{(j\omega - p_1)(j\omega - p_2)} = \frac{z_1(j\omega/z_1 - 1)}{p_2(j\omega - p_1)(j\omega/p_2 - 1)}$$

$$|T(j\omega)| \approx \frac{|z_1|}{|p_2| |j\omega - p_1|}$$

$$\arg T(j\omega) \approx \arg\left(\frac{z_1}{p_2}\right) - \arg(j\omega - p_1)$$

$|p_1| \ll \omega \ll |z_1|$ のとき

$|p_1|/\omega \ll 1, \quad \omega/|z_1| \ll 1, \quad \omega/|p_2| \ll 1$ のので

$$T(j\omega) = \frac{(j\omega - z_1)}{(j\omega - p_1)(j\omega - p_2)} = \frac{z_1(j\omega/z_1 - 1)}{j\omega p_2(1 - p_1/j\omega)(j\omega/p_2 - 1)}$$

$$|T(j\omega)| \approx \frac{|z_1|}{|p_2| \omega}$$

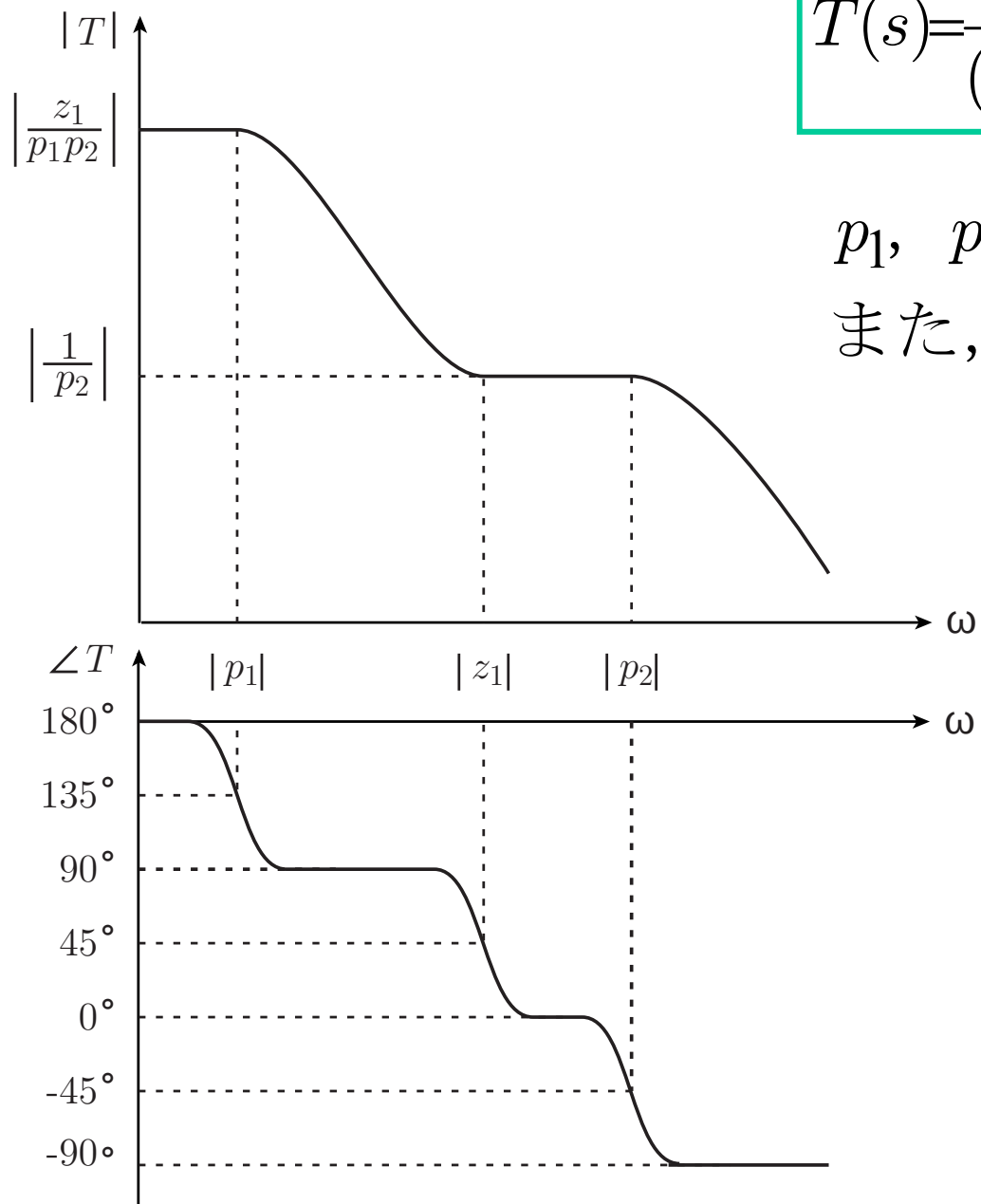
$$\arg T(j\omega) \approx \arg\left(\frac{z_1}{p_2}\right) - 90^\circ$$

回路の周波数特性の例

$$T(s) = \frac{(s - z_1)}{(s - p_1)(s - p_2)}$$

p_1, p_2, z_1 は実数.

また, $p_1 < 0, p_2 < 0, z_1 > 0$ とする.



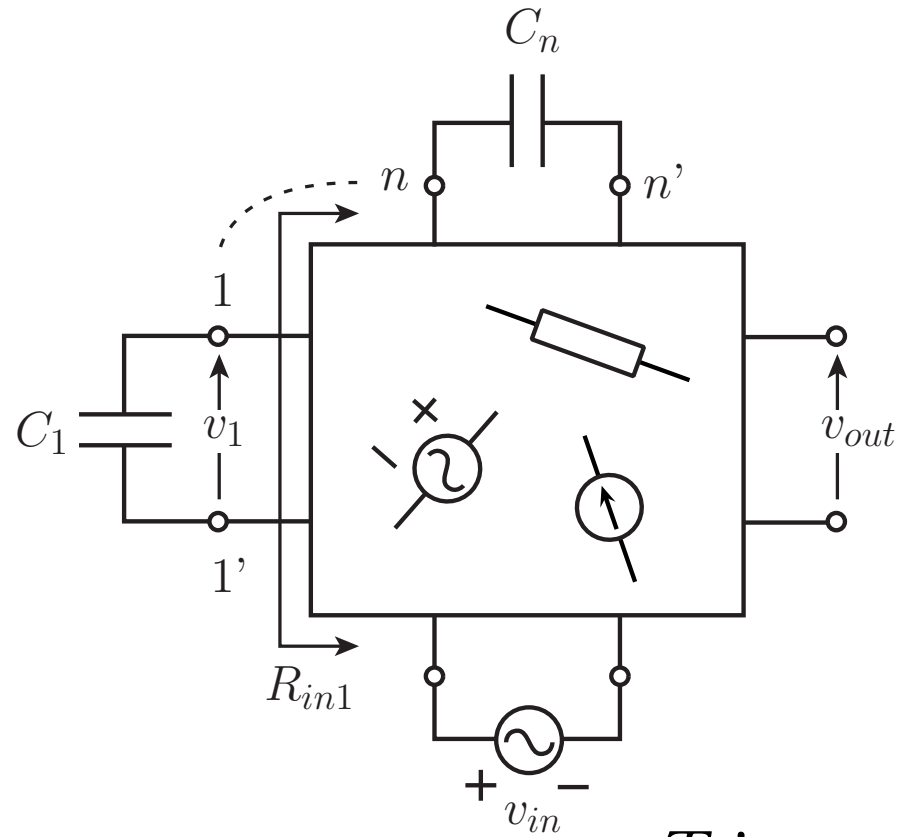
零時定数解析

$$T(j\omega) = \frac{T_0}{(j\omega - p_1)(j\omega - p_2) \cdots (j\omega - p_n)} \text{と近似}$$

$|p_1| \ll |p_i| (i=2 \sim n)$ と近似

$\omega \ll |p_i| (i=2 \sim n)$ のとき

$$\begin{aligned} T(j\omega) &= \frac{T_0}{(-1)^n p_1 p_2 \cdots p_n (1 - j\omega/p_1)(1 - j\omega/p_2) \cdots (1 - j\omega/p_n)} \\ &\approx \frac{T_0}{(-1)^n p_1 p_2 \cdots p_n (1 - j\omega/p_1)} \end{aligned}$$



$$T(j\omega) = \frac{T_0'}{1 + j\omega C_1 R_1 + j\omega C_2 R_2 + \dots + j\omega C_n R_n + D_1(j\omega)}$$

$$\frac{v_1}{v_{in}} = \frac{k_1}{1 + j\omega C_1 R_{in1}}$$

$$\frac{v_{out}}{v_{in}} = \frac{k_1'}{1 + j\omega C_1 R_{in1}}$$

$$k_1' = T_0', \quad R_1 = R_{in1}$$

$$T(j\omega) \approx \frac{T_0}{(-1)^n p_1 p_2 \cdots p_n (1 - j\omega/p_1)}$$

$$T(j\omega) = \frac{T_0'}{1 + j\omega C_1 R_{in1} + j\omega C_2 R_{in2} + \cdots + j\omega C_n R_{inn} + D_1(j\omega)}$$

$$-\frac{1}{p_1} \approx C_1 R_{in1} + C_2 R_{in2} + \cdots + C_n R_{inn}$$

p_1 : 主要極

$$T_0' = \frac{T_0}{(-1)^n p_1 p_2 \cdots p_n}$$