

高速フーリエ変換

通常、 2^n 点のサンプルの信号で周波数分析を行い、特定の計算パターンが繰り返し現れることを利用して計算量を減らす。

短いサンプルデータでは大きな効果は無いが、ここでは $N=4$ のサンプル点数として概要を示す。

離散化されたサンプル点を x_0, x_1, x_2, x_3 として離散フーリエ級数展開すると

$$x_n = \sum_{k=0}^{N-1} X_k e^{-j2k\pi/N}$$

$$X_k = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x_n e^{-jkn(2\pi/N)} = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x_n \left(e^{-j2\pi/N} \right)^{kn} = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x_n W_N^{kn}$$

ただし $W_N = e^{-j2\pi/N}$

※ n は時系列, k は周波数領域の順番を示す添字

$$W = W_4 = e^{-j\pi/2} = -j$$

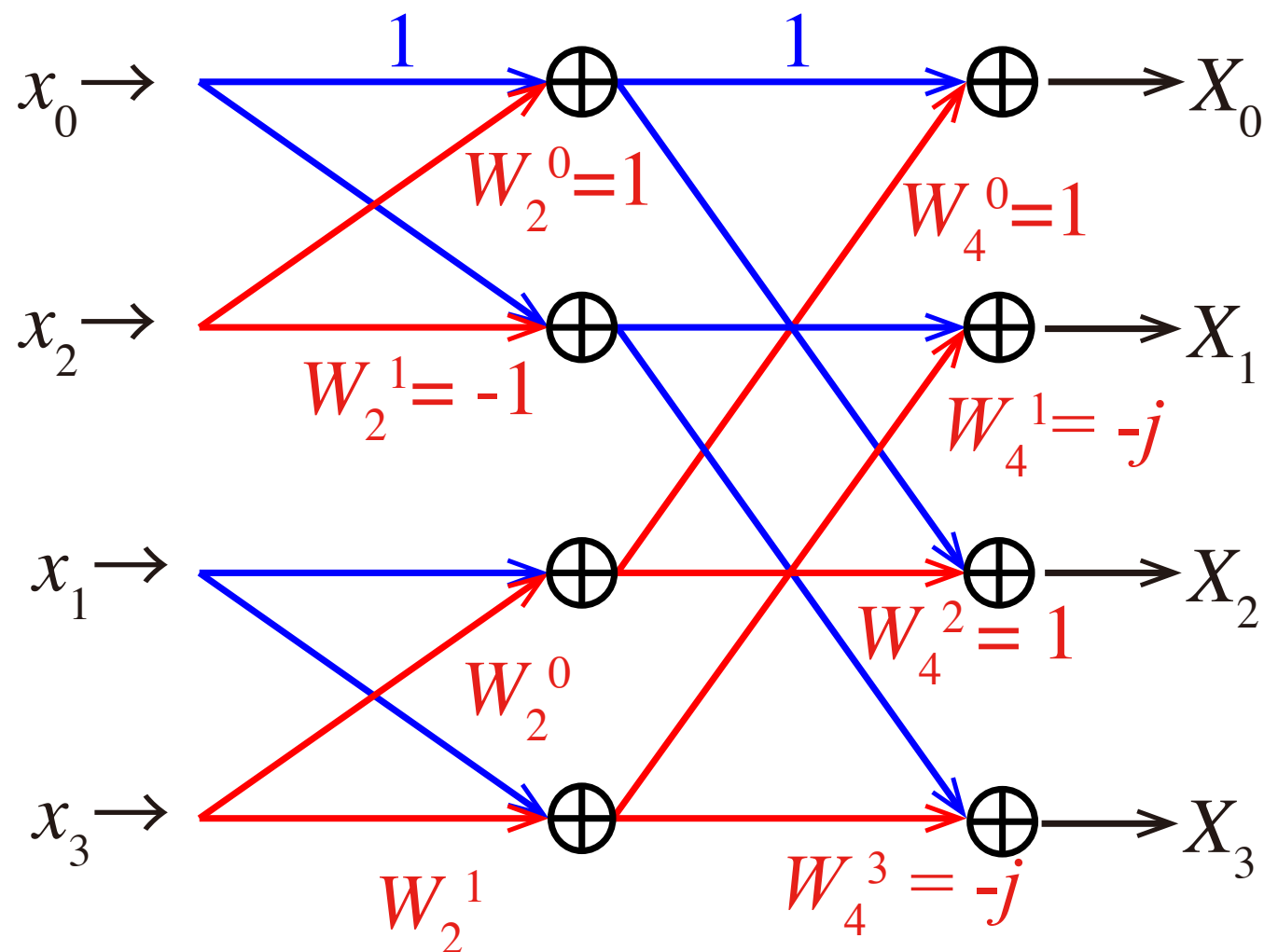
$$\begin{pmatrix} X_0 \\ X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} W^0 & W^0 & W^0 & W^0 \\ W^0 & W^1 & W^2 & W^3 \\ W^0 & W^2 & W^4 & W^6 \\ W^0 & W^3 & W^6 & W^9 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -j & -1 & j \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & j & -1 & -j \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

右辺の x_1 と x_2 を入れ替えて, $W_2 = -1$ を用いて変形すると

$$\begin{pmatrix} X_0 \\ X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -j & j \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & j & -j \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ x_2 \\ x_1 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & W^0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & W^1 \\ 1 & 0 & W^2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & W^3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & W_2^0 & 0 & 0 \\ 1 & W_2^1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & W_2^0 \\ 0 & 0 & 1 & W_2^1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ x_2 \\ x_1 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

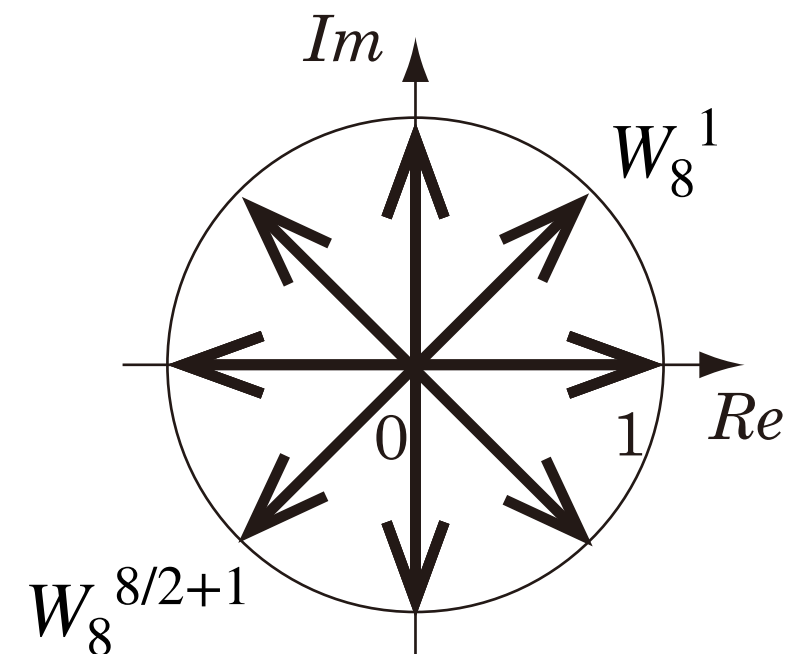
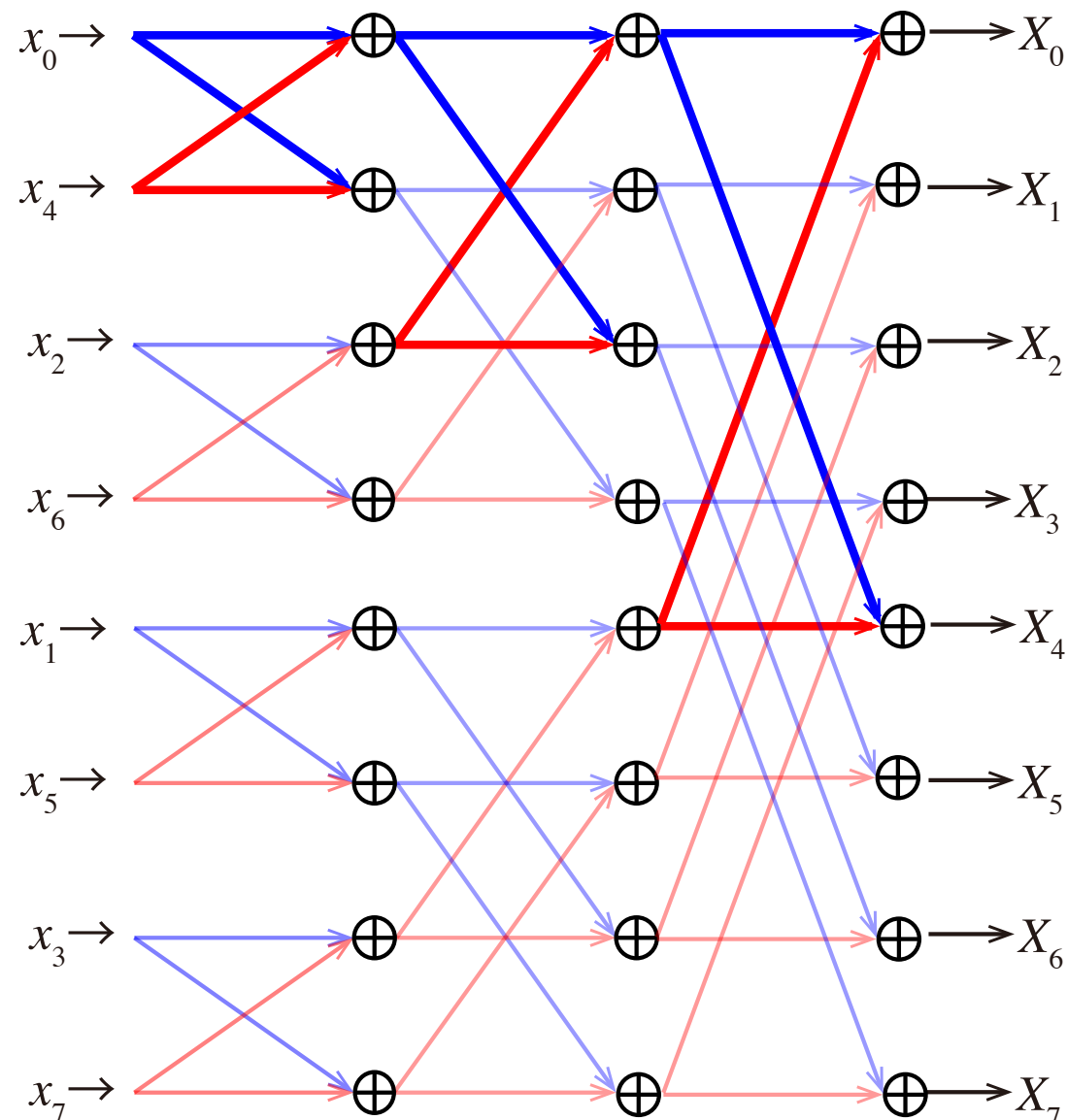
$$\begin{pmatrix} X_0 \\ X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & W_4^0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & W_4^1 \\ 1 & 0 & W_4^2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & W_4^3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & W_2^0 & 0 & 0 \\ 1 & W_2^1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & W_2^0 \\ 0 & 0 & 1 & W_2^1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ x_2 \\ x_1 \\ x_3 \end{pmatrix}$$



N 点の時系列データに対して $W_N = e^{-j2\pi/N}$ とするとき

$$W_N^0 = 1 \quad W_N^{N/2} = e^{-j2\pi/N \times N/2} = e^{j\pi} = -1 \quad W_N^{(N/2+i)} = -W_N^i$$

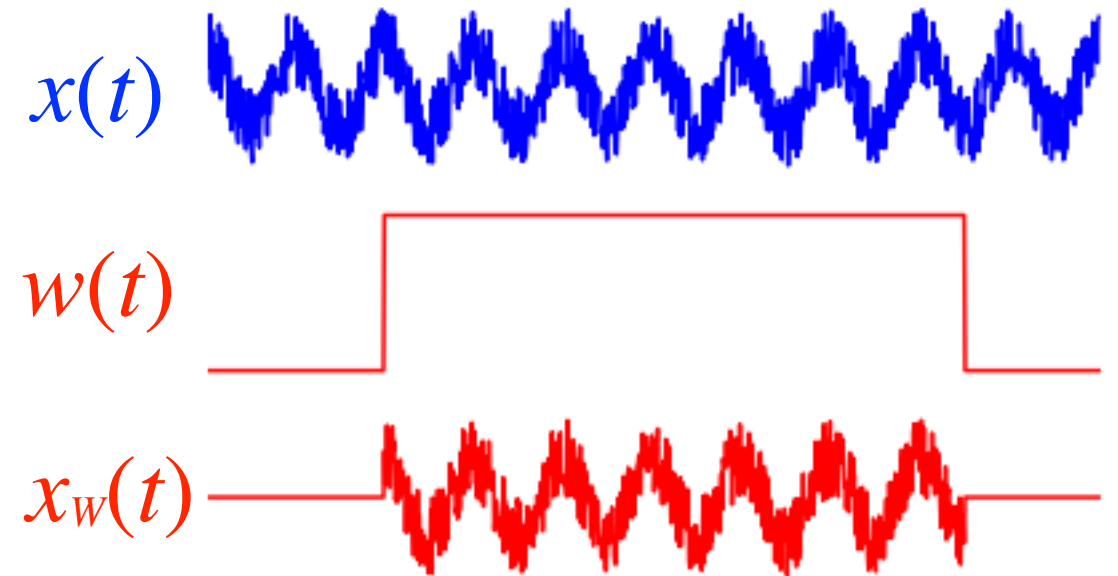
よって W_N^i は半分までの計算で良い。



かけ算の回数が N^2 の
オーダーから $N \log N$ の
オーダーへ減る

周波数分析に関する もろもろ補足

現実には有限窓幅で解析するので時間波形 $x(t)$ に窓関数が作用したものをフーリエ変換



$$X_W(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \cdot w(t) e^{-j2\pi ft} dt$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} X(f_1) e^{j2\pi f_1 t} df_1 \right\} w(t) e^{-j2\pi ft} dt$$

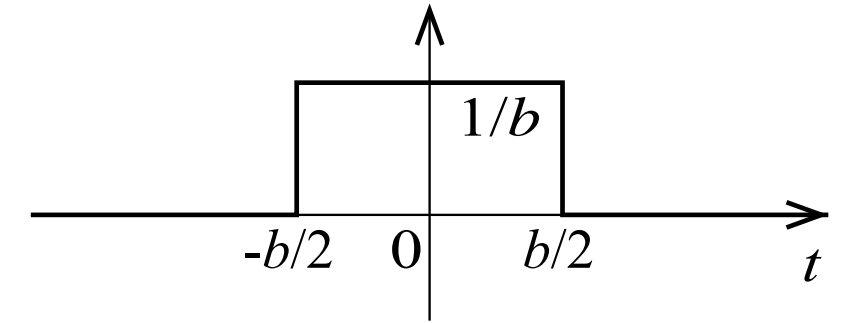
$$= \int_{-\infty}^{\infty} X(f_1) \int_{-\infty}^{\infty} w(t) e^{-j2\pi(f-f_1)t} dt df_1 \quad \text{積分の順番入替}$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} X(f_1) W(f-f_1) df_1 = \int_{-\infty}^{\infty} X(f-f_1) W(f) df_1$$

矩形窓で得られるスペクトルは $X(f)$ と $W(f)$ の畳み込み

窓幅 b の区間のみ取り出す窓関数

$$w(t) = \begin{cases} 1/b & (|t| \leq b/2) \\ 0 & (|t| > b/2) \end{cases}$$

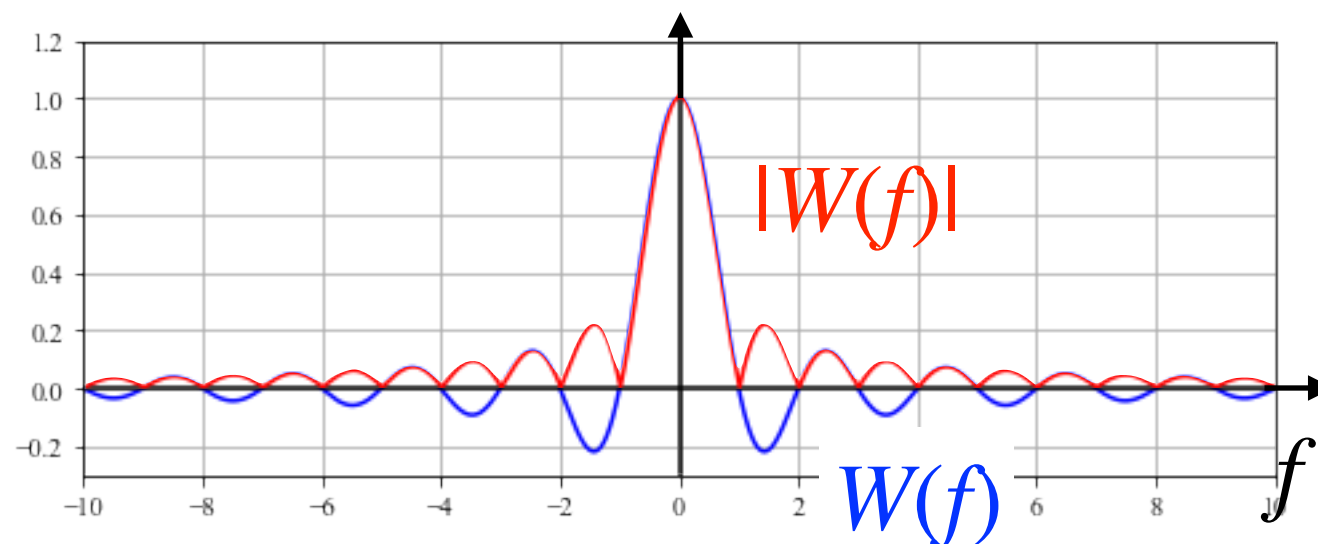


※時間幅 b で時間平均するために高さ $1/b$

これをフーリエ変換すると

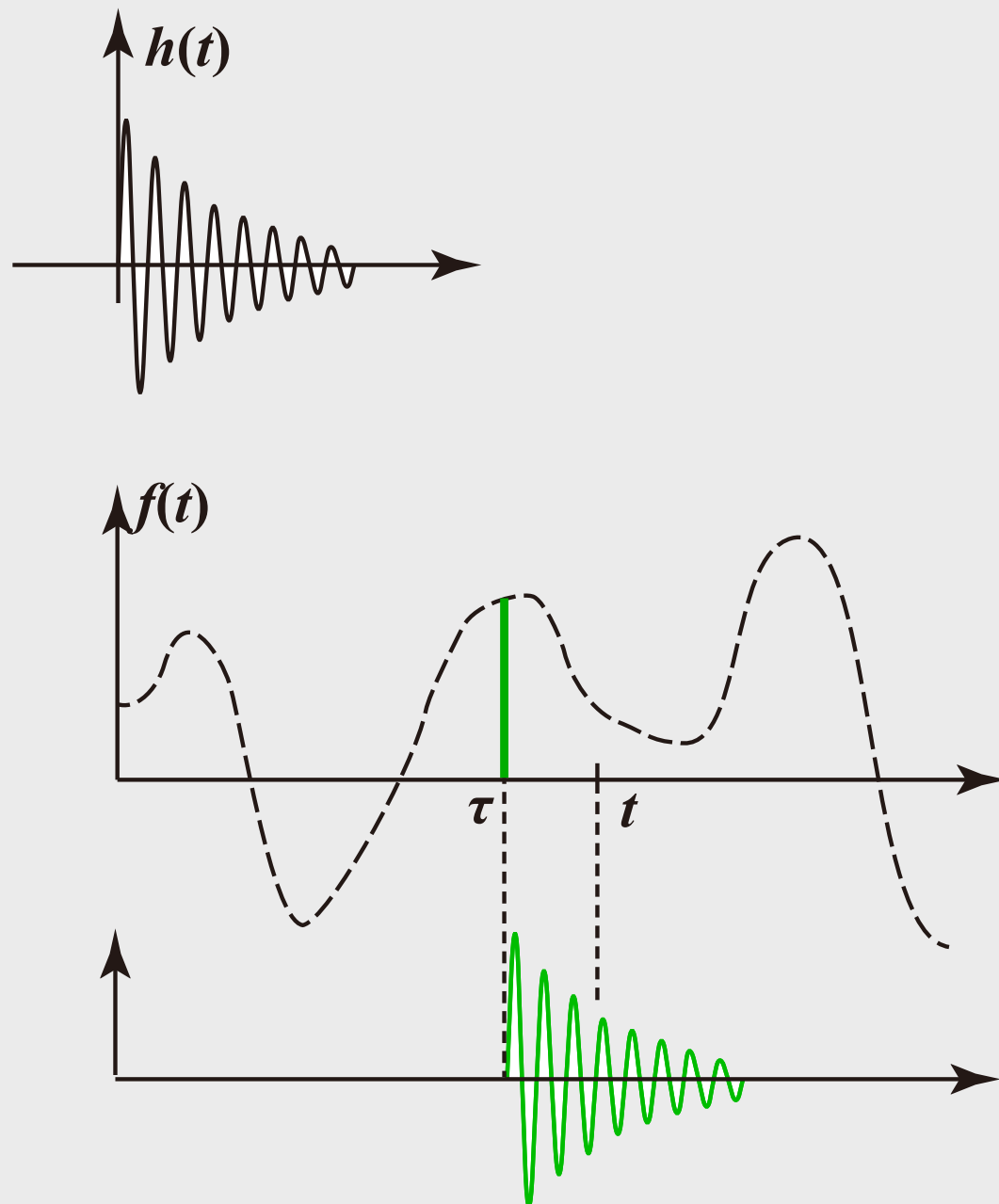
$$W(f) = \frac{\sin \pi b f}{\pi b f}$$

※ 4/20のものは窓幅が異なり、フーリエ変換と言いながらフーリエ級数的な表現で少しおかしい

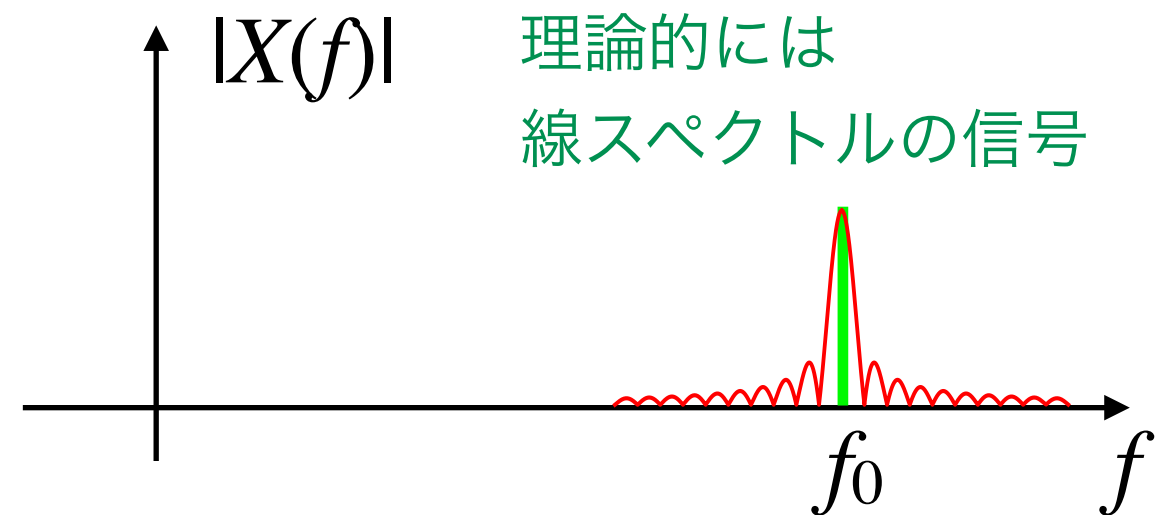
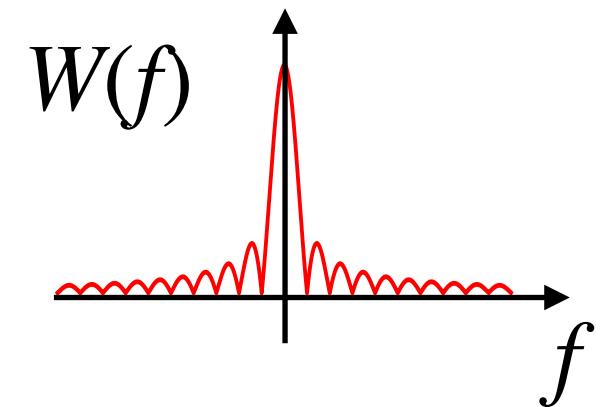


時間領域での畳み込み

周波数領域での畳み込み



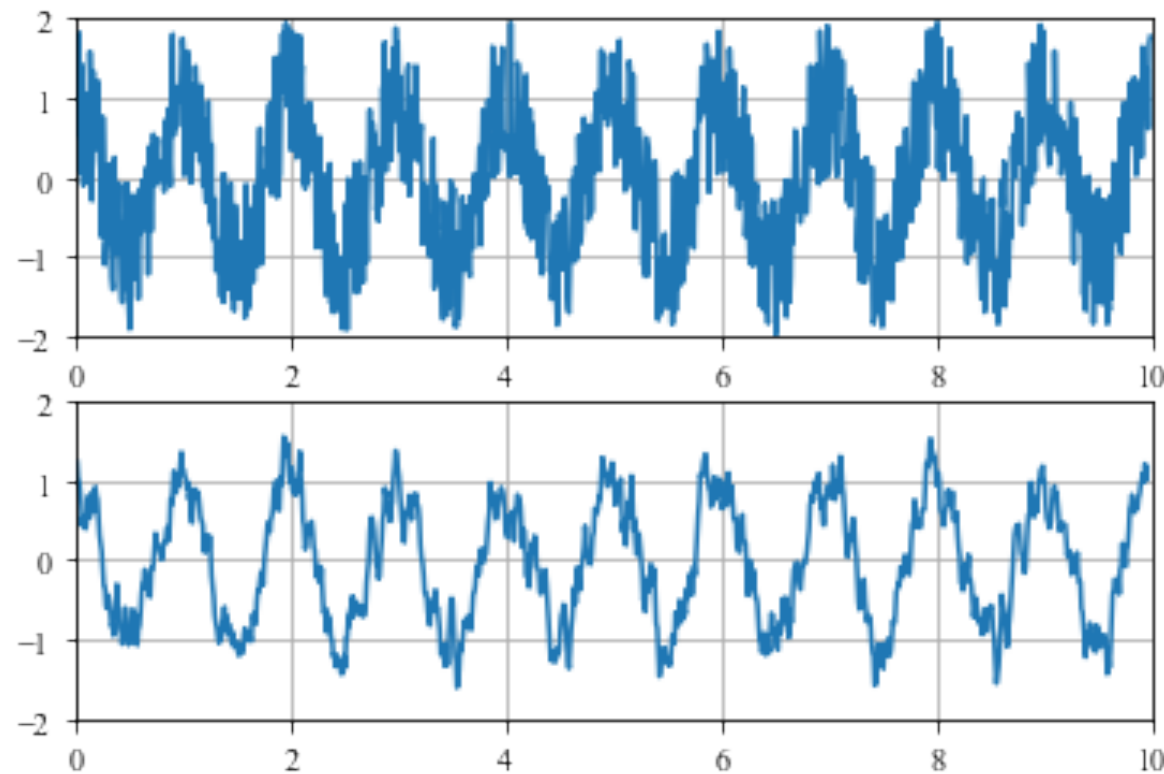
$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\eta) h(t - \eta) d\eta = f(t) * h(t)$$



理論的には
線スペクトルの信号

畳み込みで窓関数のスペクトル
が f_0 中心に移動

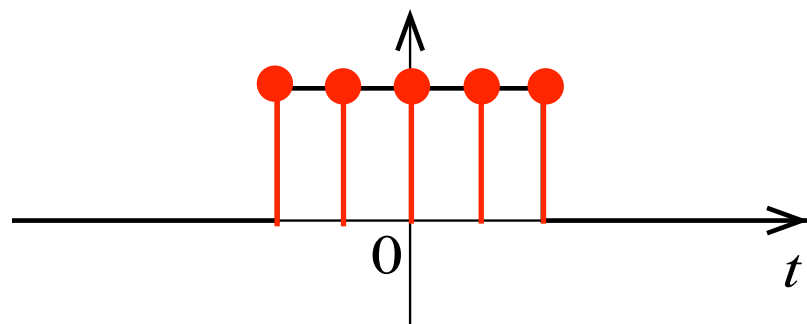
$$\begin{aligned} X_W(f) &= W(f) * X(f) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} X(f_1) W(f - f_1) df_1 \end{aligned}$$



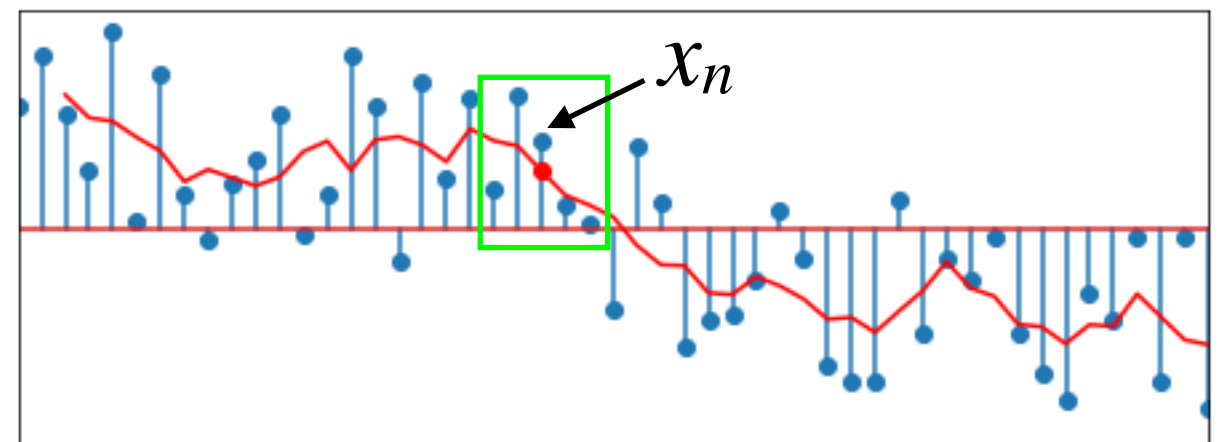
ノイズを含んだ時間波形

5点移動平均でノイズを抑制

$$x_{na} = \frac{x_{n-2} + x_{n-1} + x_n + x_{n+1} + x_{n+2}}{5}$$



5点分の幅の矩形窓を作用
させた畳み込みに相当



異常振動の検出

前回

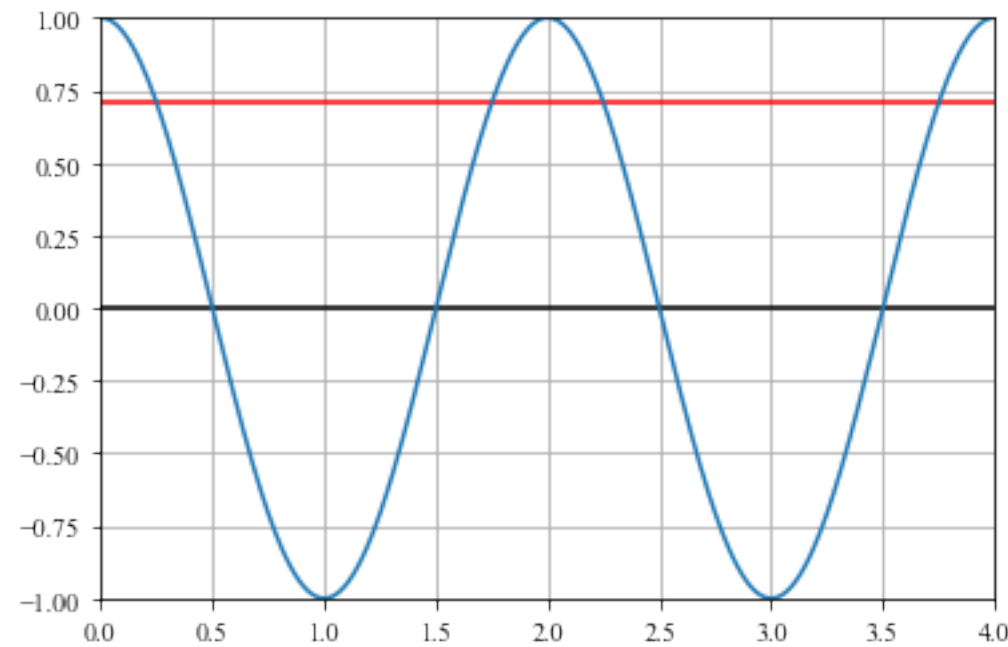
$$C(0) = \overline{x^2} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-\infty}^{\infty} x^2(t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} S(\omega) d\omega$$
$$S(\omega) = \lim_{T \rightarrow \infty} \left\{ \frac{2\pi X(\omega) X^*(\omega)}{T} \right\}$$

時間波形の二乗値の平均値はパワースペクトル密度関数を全周波数帯に渡り積分したものと対応するので、複数の周波数成分が含まれる振動の大きさを表示するのに都合が良い。

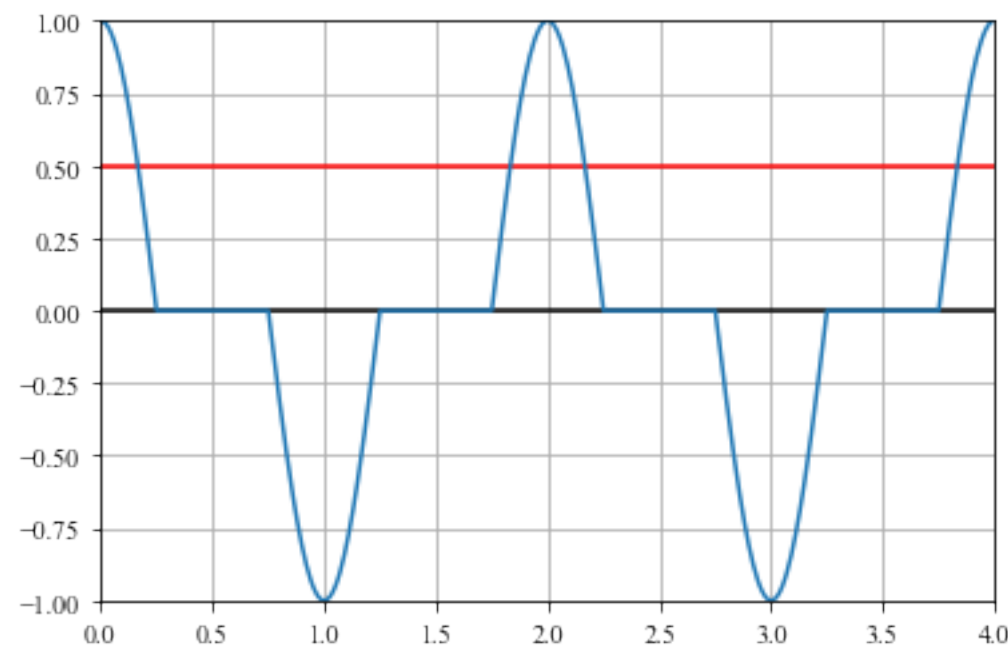
これの平方根をとり振幅の次元にしたのが実効値 (Root Mean Square value)

$$\sqrt{\overline{x^2}} = \sqrt{\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-\infty}^{\infty} x^2(t) dt} = \sqrt{\sigma^2}$$

ピーク高さを実効値で
割ったもの



$$\text{C.F.} = \sqrt{2}$$

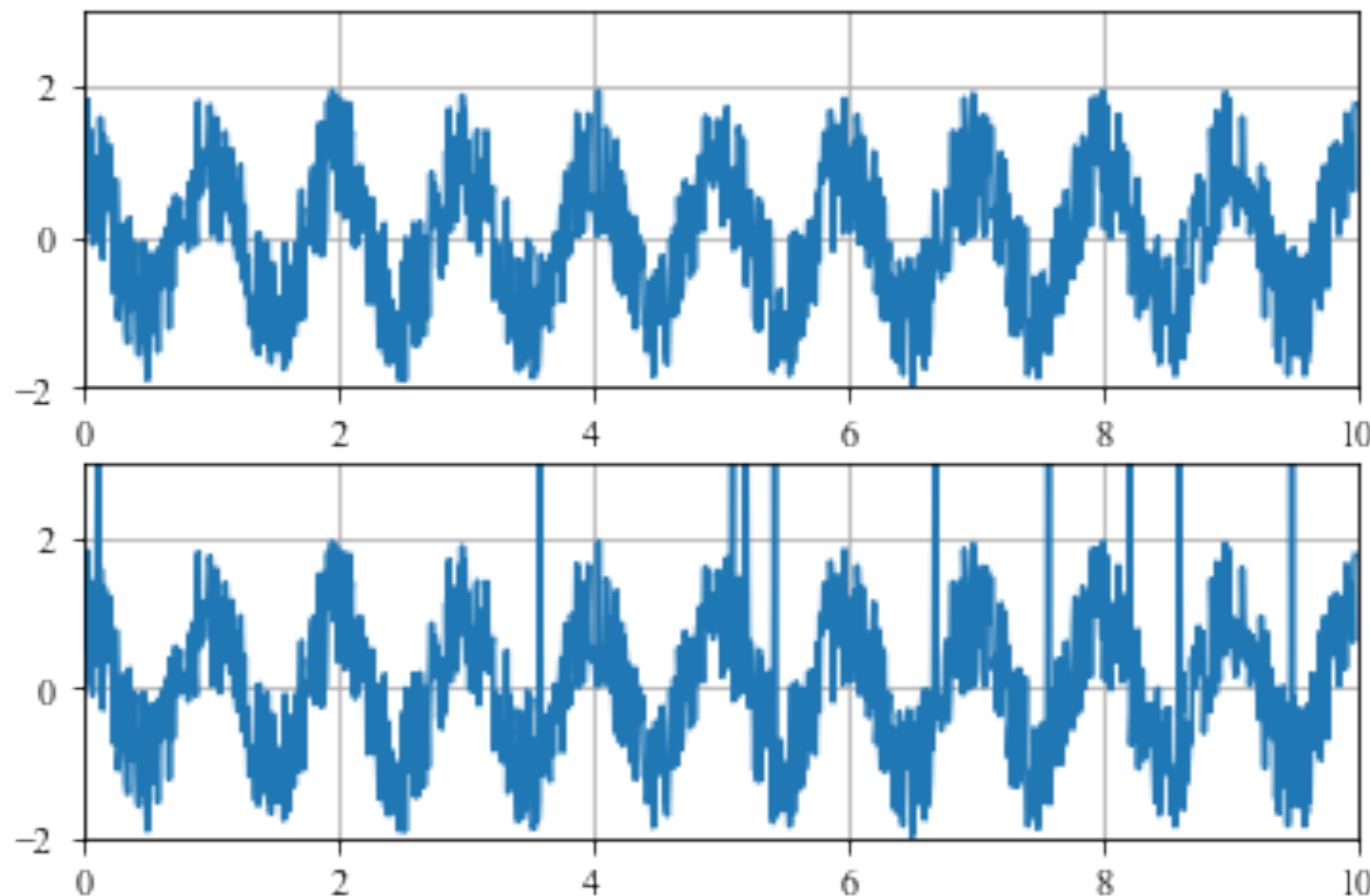


$$\text{C.F.} = 2$$

スパイク状の異常振動を検出するための指標

$$\frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \frac{(x_k - \mu)^4}{\sigma^4}$$

書き換えると $\frac{\overline{(x - \bar{x})^4}}{\bar{x}^2}$



実効値 クルトーシス

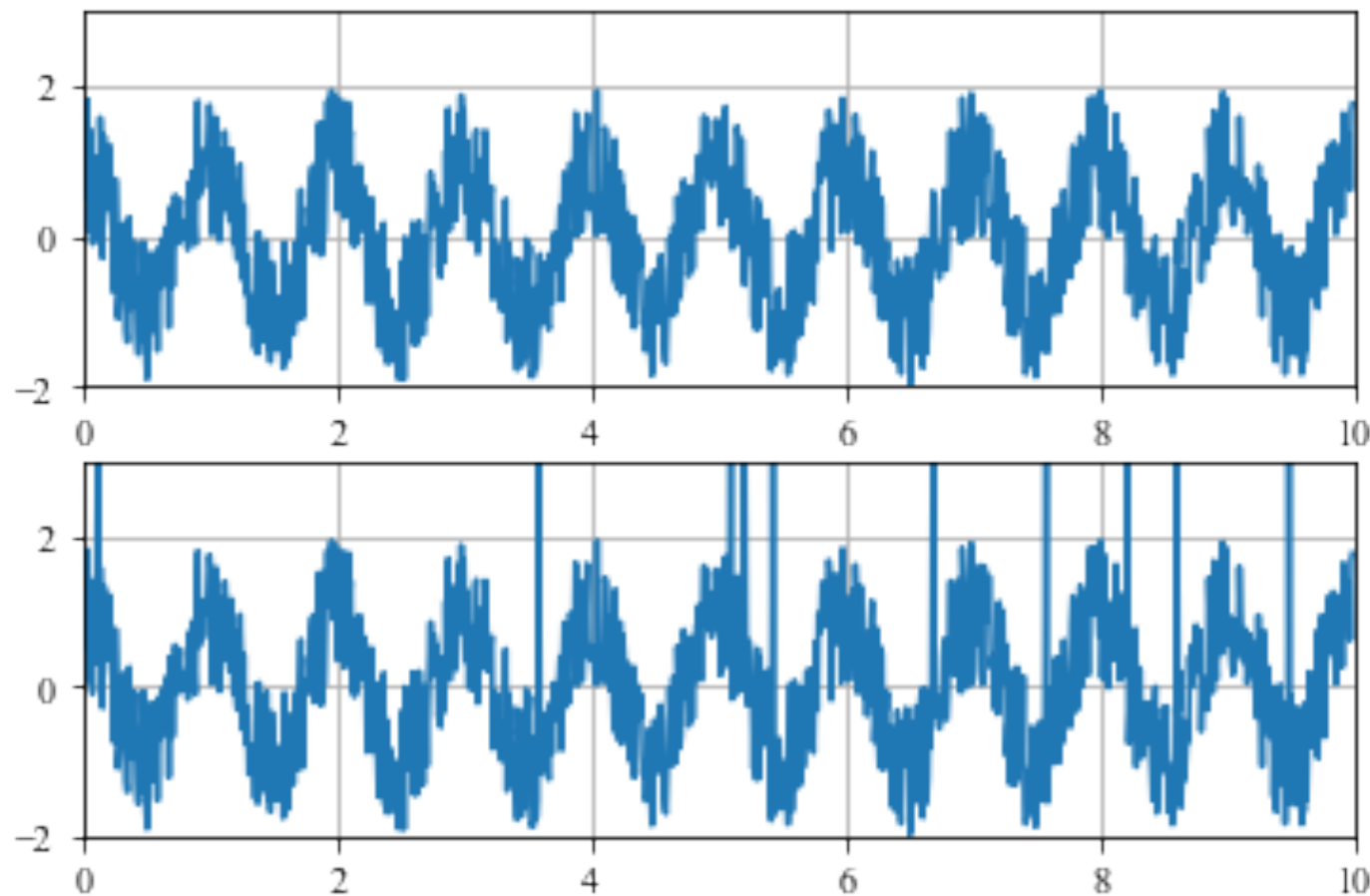
0.916 1.900

0.961 2.596

部分的なスパイクの存在は実効値では検出困難.
クルトーシスでは変化が明確.

$$\frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \frac{(x_k - \mu)^3}{\sigma^3}$$

クルトーシスとは乗数が異なる



実効値 スキューネス

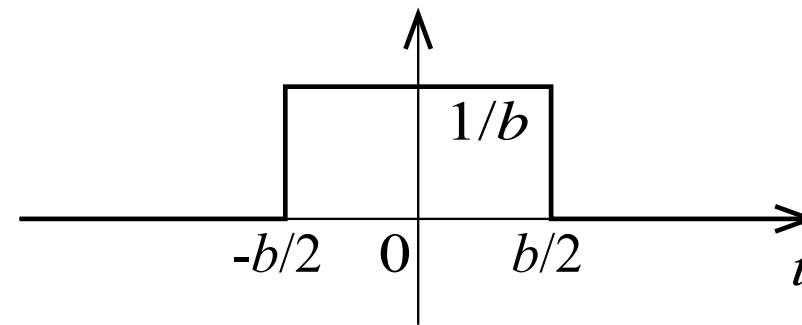
0.916

-0.011

0.961

0.189

$$\textcircled{1} \quad w(t) = \begin{cases} 1/b & (|t| \leq b/2) \\ 0 & (|t| > b/2) \end{cases}$$



上の単一矩形波をフーリエ変換すると下のsinc関数になることを示せ.

$$W(f) = \frac{\sin \pi b f}{\pi b f}$$

② ハニング窓をフーリエ変換せよ.

$$w(t) = \begin{cases} \frac{1 + \cos \frac{2\pi t}{b}}{2} = \cos^2 \frac{\pi t}{b} & (|t| \leq \frac{b}{2}) \\ 0 & (|t| > \frac{b}{2}) \end{cases}$$

