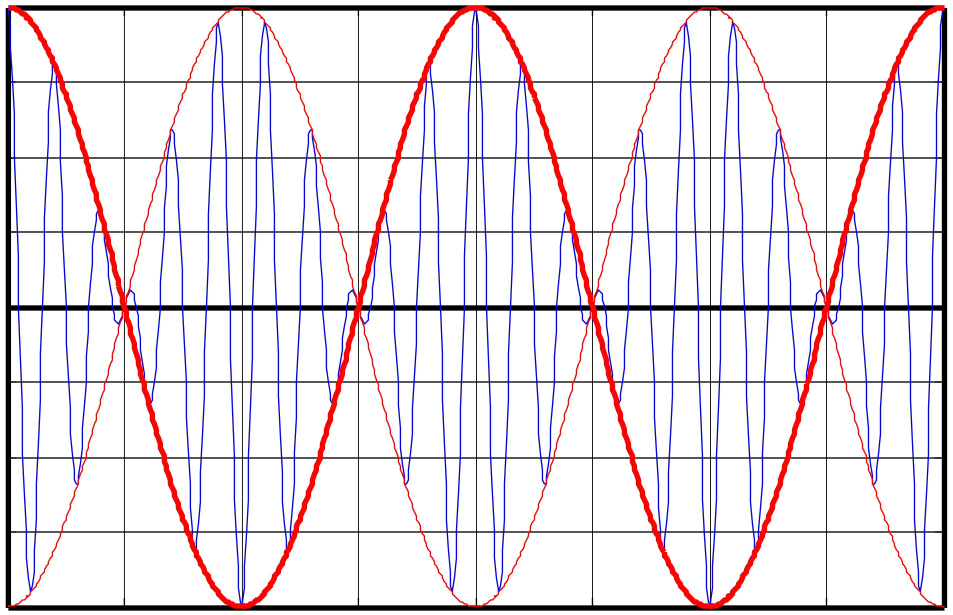
うなりの周波数成分

うなりの周波数成分



振幅が変動する様子を $\Delta\omega \ll \omega$

として，位相など省略して

$$x = A\cos\Delta\omega t \times \cos\omega t$$

$$\cos\alpha\ \cos\beta = \frac{1}{2}\left\{\cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta)\right\}$$ より

$$x = \frac{A}{2}\left\{\cos(\omega+\Delta\omega)t + \cos(\omega-\Delta\omega)t\right\}$$

で中心周波数 ω に対し，$\pm\Delta\omega$ 離れた２つの周波数成分に分かれる.

簡易的な複素数表現で間違える人が多い.

$$x = Xe^{j\Delta\omega t}e^{j\omega t} = Xe^{j(\omega+\Delta\omega)t}$$ ← １つの周波数成分でオカシイ

複素数表現で正しく取り扱うと

$$\frac{e^{j\Delta\omega t}+e^{-j\Delta\omega t}}{2}\times\frac{e^{j\omega t}+e^{-j\omega t}}{2}$$

$$=\frac{1}{4}\{e^{j\Delta\omega t}e^{j\omega t}+e^{j\Delta\omega t}e^{-j\omega t}+e^{-j\Delta\omega t}e^{j\omega t}+e^{-j\Delta\omega t}e^{-j\omega t}\}$$

$$=\frac{1}{2}\left\{\frac{e^{j(\omega+\Delta\omega)t}+e^{-j(\omega+\Delta\omega)t}}{2}+\frac{e^{j(\omega-\Delta\omega)t}+e^{-j(\omega-\Delta\omega)t}}{2}\right\}$$

$$=\frac{1}{2}\left\{\cos(\omega+\Delta\omega)t+\cos(\omega-\Delta\omega)t\right\}$$

＜変動成分＞×＜変動成分２＞の計算の時は負の周波数成分を考慮する必要あり.

雑学：ラジオ放送

$v = V(1 + \alpha\cos\Delta\omega t)\ \cos\omega_c t$ のように高周波数のキャリア周波数 ω_c と比べて、非常に低い周波数 $\Delta\omega$ で振幅を変動させたものが，ラジオ放送などに使われるAM (振幅変調：Amplitude Modulation) 波.

人間に聞こえる音は主に数kHzだが，電波としては周波数が低すぎる.

AMラジオ（中波）の周波数域

531kHz〜1602kHzの9kHz間隔　← 高音はのらない

ちなみに音の周波数域の電波は10m+α程度水中まで届くので潜水艦との通信に使用されるが大規模施設必要

自己相関関数と
パワースペクトル

パワースペクトル（前回と別形式）

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega)\, e^{j\omega t} d\omega \qquad X(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\, e^{-j\omega t} dt$$

$$S(\omega) = \lim_{T \to \omega} \left\{ \frac{2\pi X(\omega)\, X^{*}(\omega)}{T} \right\}$$

参考：前回 $P(f) = \lim_{T\to\infty}\left[\frac{1}{T}|X(f)|^2\right] = \lim_{T\to\infty}\left[\frac{1}{T}X(f)X^*(f)\right]$

パワースペクトル密度関数は，慣例的に Hz 単位の時は $P(f)$ で，角速度ベースの時は $S(\omega)$ と書かれているときが多い.

他に -∞〜+∞ で定義される $S(\omega)$ を 0〜∞ に折り返した $G(\omega)$ 表記も見かける.

自己相関関数

$$C(\tau) = \lim_{T\to\infty}\int_{-T/2}^{T/2} x(t)x(t+\tau)dt$$

$$= \lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} x(t)\left[\int_{-\infty}^{\infty} X(\omega)e^{j\omega(t+\tau)}d\omega\right]dt$$

積分順序を入れ替えて

$$= \lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_{-\infty}^{\infty} X(\omega)\left[\int_{-T/2}^{T/2} x(t)e^{j\omega t}dt\right]e^{j\omega\tau}d\omega$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty}\lim_{T\to\infty}\left\{\frac{2\pi X(\omega)\,X^*(\omega)}{T}\right\}e^{j\omega\tau}d\omega$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} S(\omega)\,e^{j\omega\tau}d\omega$$

パワースペクトルと自己相関関数

$$C(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} S(\omega)\, e^{j\omega\tau} d\omega \qquad S(\omega) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} C(\tau)\, e^{-j\omega\tau} d\tau$$

パワースペクトル $S(\omega)$ は相互相関関数 $C(\tau)$ のフーリエ変換である．（Wiener-Khintchineの定理）

τ=0 の時
$$C(0) = \overline{x^2} = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_{-\infty}^{\infty} x^2(t)\, dt = \int_{-\infty}^{\infty} S(\omega)\, d\omega$$

∗ 前回フーリエ変換は Hz 単位で扱っていたが，ココでは都合上，角速度をベースに話していきます．

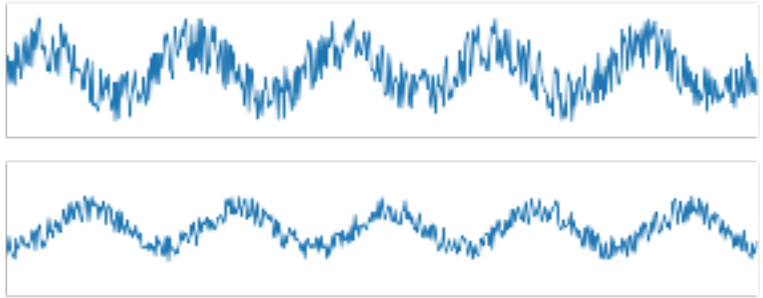
相互相関関数と
クロススペクトル

相互相関関数

２つの信号 $x(t)$ と $y(t)$ の相互相関関数は

$x(t)$

$y(t)$



$$C_{xy}(\tau) = \overline{x(t)\,y(t+\tau)} = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} x(t)\,y(t+\tau)\,dt$$

その性質として

$$C_{xy}(-\tau) = C_{yx}(\tau)$$

なぜなら $$C_{xy}(-\tau) = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} x(t)\,y(t-\tau)\,dt$$

$u = t - \tau$ と座標変換すると

$$C_{xy}(-\tau) = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} y(u)\,x(u+\tau)\,du = C_{yx}(\tau)$$

クロススペクトル

自己相関関数のフーリエ変換がパワースペクトル密度関数であるように，相互相関関数のフーリエ変換としてクロススペクトルが定義できる．

$$S_{xy}(\omega) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} C_{xy}(\tau)\, e^{-j\omega\tau} d\tau$$

$$C_{xy}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} S_{xy}(\omega)\, e^{j\omega\tau} d\omega$$

ここで

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega)\, e^{j\omega t} d\omega \quad X(\omega) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} x(t)\, e^{-j\omega t} dt$$

$$X(-\omega) = X^*(\omega) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} x(t)\, e^{j\omega t} dt$$

クロスペクトル②

前ページから
$$\int_{-\infty}^{\infty} x(t)\, e^{j\omega t} dt = 2\pi\, X^*(\omega)$$

$$C_{xy}(\tau) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t)\, y(t+\tau)\, dt$$

$$= \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} Y(\omega)\, e^{j\omega t} e^{j\omega\tau}\, dt \right\} d\omega$$

$$= \lim_{T\to\infty} \frac{2\pi}{T} \int_{-\infty}^{\infty} X^*(\omega)\, Y(\omega)\, e^{j\omega\tau}\, d\omega$$

$$S_{xy}(\omega) = \lim_{T\to\infty} \frac{2\pi}{T} X^*(\omega)\, Y(\omega)$$

τ=0 の時 $$C_{xy}(0) = \int_{-\infty}^{\infty} S_{xy}(\omega)\, \cancel{dt}\; d\omega$$

クロススペクトルの性質＆コヒーレンス

$$S_{xy}(-\omega) = S_{xy}^{*}(\omega) = S_{yx}(\omega)$$

$S_{xy}(\omega)$ の実部をコスペクトル $K_{xy}(\omega)$，虚部をクオドスペクトル $Q_{xy}(\omega)$ とすることあり.

$K_{xy}(\omega)$ は偶関数で $Q_{xy}(\omega)$ は奇関数.

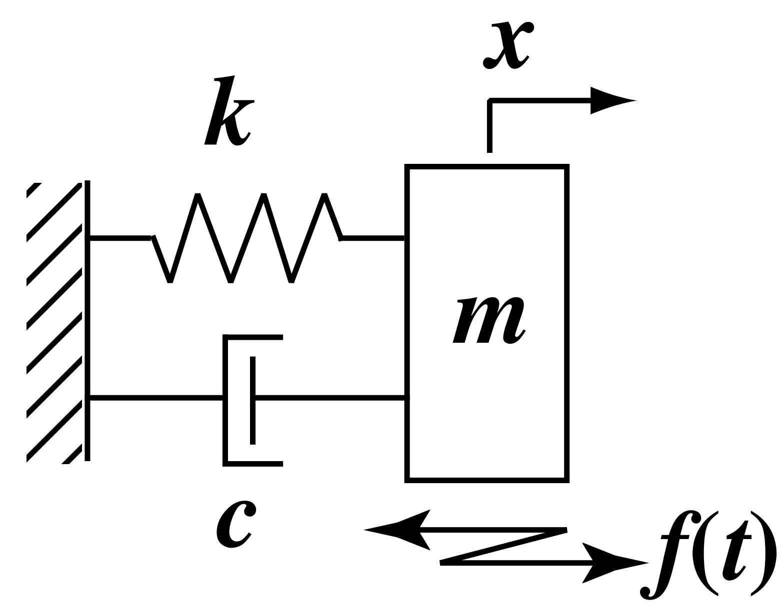
２つの信号の相関の指標として，相互相関係数の二乗であるコヒーレンス（値は 0 〜 1）

$$\mathrm{coh}^2(\omega) = \frac{|S_{xy}(\omega)|^2}{S_{xx}(\omega)\,S_{yy}(\omega)}$$

畳み込み積分と伝達関数

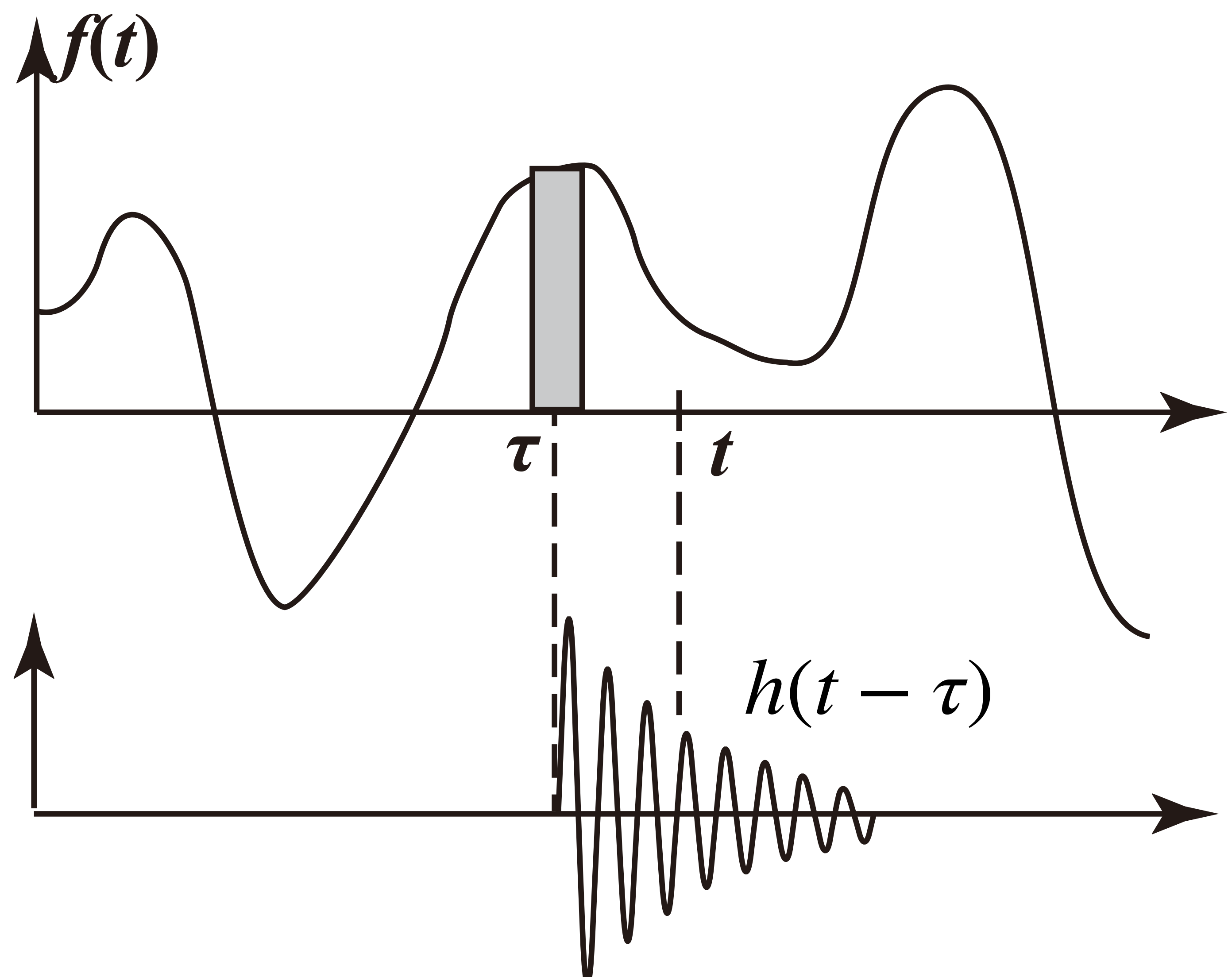
系の応答と畳み込み積分

例えば右のような 1 自由度振動系に任意形状波形の加振力 $f_i(t)$ を与えたときの応答を考える.



時刻 0 に単位インパルス加振された時の減衰自由振動波形を $h(t)$ とする.

時刻 τ の微小区間 $d\tau$ に大きさ $f(\tau)d\tau$ でインパルス加振すると



→次ページ

系の応答と畳み込み積分②

時刻 t の変位を求めるのに加振時刻 τ を 0 から t まで積分して

$$x_o(t) = \int_0^t h(t-\tau)\, f_i(\tau) d\tau$$

これが畳み込み積分（convolution integral）の形となっている.

これを直接解くのは大変だが，両辺フーリエ変換すると

$$X_o(\omega) = H(\omega)\, F_i(\omega)$$

のようになる．ここで $H(\omega)$ が伝達関数である.

畳み込み積分

時刻 η の入力 $f_i(\eta)$ と時刻 t の出力 $x_o(t)$ とおく

$$x_o(t) = \int_{-\infty}^{t} f_i(\eta)\, h(t-\eta)\, d\eta$$

$x_o(t) = f_i * h$ と書くと

$t\text{-}\eta < 0$ で $h(t\text{-}\eta) = 0$ とすれば，積分範囲を広げて

$$x_o(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f_i(\eta)\, h(t-\eta)\, d\eta$$

$u = t\text{-}\eta$ と座標変換すれば，η: $-\infty \longrightarrow +\infty$，$u$: $+\infty \longrightarrow -\infty$

$$x_o(t) = \int_{\infty}^{-\infty} f_i(t-u)\, h(u)\, (-du) = \int_{-\infty}^{\infty} f_i(t-u)\, h(u)\, du$$

再度 $u \rightarrow \eta$ と置き換えれば

$$x_o(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f_i(t-\eta)\, h(\eta)\, d\eta$$

$x_o(t) = h * f_i$ でもある

出力の自己相関

$$x_o(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f_i(t-\eta)\, h(\eta)\, d\eta$$

$$x_o(t+\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} f_i(t+\tau-\xi)\, h(\xi)\, d\xi$$

$$\begin{aligned}
C_{oo}(\tau) &= E[f_o(t)\, f_o(t+\tau)] \\
&= E\left[\iint_{-\infty}^{\infty} h(\eta)h(\xi)f_i(t-\eta)f_i(t+\tau-\xi)d\eta d\xi\right] \\
&= \iint_{-\infty}^{\infty} h(\eta)h(\xi)\; E\left[f_i(t\underline{-\eta})f_i(t+\underline{\tau-\xi})\right] d\eta d\xi
\end{aligned}$$

$$(\tau-\xi)-(-\eta)$$

$$= \iint_{-\infty}^{\infty} h(\eta)h(\xi)\; C_{ii}(\tau+\eta-\xi)\, d\eta d\xi$$

入出力の関係式

前ページの自己相関をフーリエ変換して

$$S_{oo}(\omega) = H(\omega)\,H^*(\omega)\,S_{ii}(\omega) = |\,H(\omega)\,|^2\,S_{ii}(\omega)$$

同様にクロススペクトルから

$$S_{io}(\omega) = H(\omega)\,S_{ii}(\omega)$$

演習

前々ページの自己相関関数 $C_{oo}(\tau)$ をフーリエ変換して

$S_{oo}(\omega) = H(\omega)\,H^{*}(\omega)\,S_{ii}(\omega)$　であることを示せ.

※ 例えば $\sigma = \tau + \cancel{\xi - \eta}$ と定義

$\tau + \eta - \xi$

解答

$$S_{oo}(\omega) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} C_{oo}(\tau)\, e^{-j\omega\tau} d\tau$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \iint_{-\infty}^{\infty} h(\eta)h(\xi)C_{ii}\underset{\tau+\eta-\xi}{\cancel{(\tau+\xi-\eta)}}\, d\eta\, d\xi \right\} e^{-j\omega\tau} d\tau$$

$$= \frac{1}{2\pi}\iiint_{-\infty}^{\infty} h(\eta)e^{+j\omega\eta}\, h(\xi)\overset{-}{e}^{j\omega\xi}\, C_{ii}(\sigma)e^{-j\omega\sigma}\, d\eta\, d\xi\, d\sigma$$

$$S_{ii}(\omega) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} C_{ii}(\sigma)\, e^{-j\omega\sigma} d\sigma$$ を代入すると

$$S_{oo}(\omega) = H^{*}(\omega)\, H(\omega)\, S_{ii}(\omega)$$