

$$x = C_0 + \sum_{n=1}^{\infty} C_n \cos(n\omega t + \phi_n) = C_0 + A_n \sum_{n=1}^{\infty} \cos n\omega t + B_n \sum_{n=1}^{\infty} \sin n\omega t \quad C_n = \sqrt{A_n^2 + B_n^2}$$

に対して $x = \sum_{n=-\infty}^{\infty} X_n e^{jn\omega t}$ としたときの複素振幅の大きさは

$$C_n = |X_n| + |X_n^*| = 2|X_n|$$

t と τ など紛らわしい文字は区別して書く

$$C(\tau) = \frac{1}{T} \int_0^T x(t) x(t+\tau) dt$$

$$x(t+\tau)$$

演習 1 で倍角の公式で変形して計算量増えている人多い

※場合によってはこれが近道の場合もあるが

フーリエ級数展開は (定数係数) $\times e^{jn\omega t}$ など

$x(t) = a \sin 2\pi t$ の自己相関関数 $C(\tau)$ を式で示せ.

↓ 変動成分×変動成分は積分しにくい

$$\begin{aligned} C(\tau) &= \frac{1}{T} \int_0^T x(t) x(t + \tau) dt = a^2 \int_0^1 \sin 2\pi t \sin 2\pi(t + \tau) dt \\ &= \frac{a^2}{2} \int_0^1 \{ \cos 2\pi\tau - \cos 2\pi(2t + \tau) \} dt = \frac{a^2}{2} \left\{ \cos 2\pi\tau - \frac{1}{4\pi} [\sin(4\pi t + 2\pi\tau)]_0^1 \right\} \\ &= \frac{a^2}{2} \cos 2\pi\tau \end{aligned}$$

↑ 単一周波数成分の積分は簡単

$$\sin \alpha \sin \beta = \frac{\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)}{2}$$

フーリエ変換

Fourier transform

フーリエ級数は周期関数を取り扱うが、非周期関数（例えばステップ応答）に適用できるように拡張したものがフーリエ変換である。

T が有限とすると、周波数解像度 $\Delta f = f_1 = 1 / T$ 、その n 次高調波 (n^{th} harmonics) の周波数 $f_n = n / T$ [Hz] として

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[\left\{ \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) e^{-j2\pi f_n t} dt \right\} e^{j2\pi f_n t} \right]$$

基本周期 $T \rightarrow \infty$ の極限を考える。

$$x(t) = \lim_{T \rightarrow \infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[\left\{ \int_{-T/2}^{T/2} x(t) e^{-j2\pi f_n t} dt \right\} \Delta f \cdot e^{j2\pi f_n t} \right]$$

$$\begin{aligned} x(t) &= \lim_{T \rightarrow \infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[\left\{ \int_{-T/2}^{T/2} x(t) e^{-j2\pi f_n t} dt \right\} \Delta f \cdot e^{j2\pi f_n t} \right] \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} X(f) e^{j2\pi f t} df \end{aligned}$$

フーリエ積分 (Fourier integral) or
フーリエ逆変換 (inverse Fourier transform)

$$X(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j2\pi f t} dt \quad \text{フーリエ変換 (Fourier transform)}$$

ただし $x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} X(f) e^{j2\pi f t} df = \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega) e^{j\omega t} d\omega$ とおくと

$df = d\omega / 2\pi$ であるから

$$X(\omega) = \frac{X(f)}{2\pi} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt$$

となり, 係数が異なることに注意

係数に関してはフーリエ変換と逆変換の対称性から

$$x(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega) e^{j\omega t} d\omega$$

$$X(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt$$

と定義する教科書もある.

音などを取り扱う際に, 空間的な変動のフーリエ変換を行うこともあり, 波長 λ [m] の逆数である波数 (wave number) k [1/m] を用いて

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} F(k) e^{jkx} dk$$

$$F(k) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-jkx} dx$$

$\mathcal{F} [x(t)]$ は $x(t)$ のフーリエ変換を表す.

$$\mathcal{F} [a_1 x_1(t) + a_2 x_2(t)] = a_1 X_1(f) + a_2 X_2(f_2)$$

$$\mathcal{F} [x(at)] = \frac{1}{a} X(f/a) \quad \text{ただし } a > 0 \quad (\rightarrow \text{演習})$$

$$\mathcal{F} [x(t - \tau)] = X(f) e^{-j2\pi f\tau}$$

$$u = t - \tau \text{ とおくと } dt = du$$

$$\begin{aligned} \mathcal{F} [x(t - \tau)] &= \int_{-\infty}^{\infty} x(t - \tau) e^{-j2\pi f t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} x(u) e^{-j2\pi f \cdot (u + \tau)} du \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} x(u) e^{-j2\pi f u} du \times e^{-j2\pi f \tau} = X(f) e^{-j2\pi f \tau} \end{aligned}$$

t や u を含まないので積分の外へ $\uparrow$

$$\frac{d}{dt}d(t) \Leftrightarrow j\omega X(\omega)$$

両方向矢印はフーリエ変換と
逆変換で互いに変換されると
いう意味

$$x(t)e^{j2\pi f_0 t} \Leftrightarrow X(f-f_0)$$

$$X(t) \Leftrightarrow x(-f)$$

$$[X(f)] = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{j2\pi ft} dt$$

$t = -t'$ と置き換え

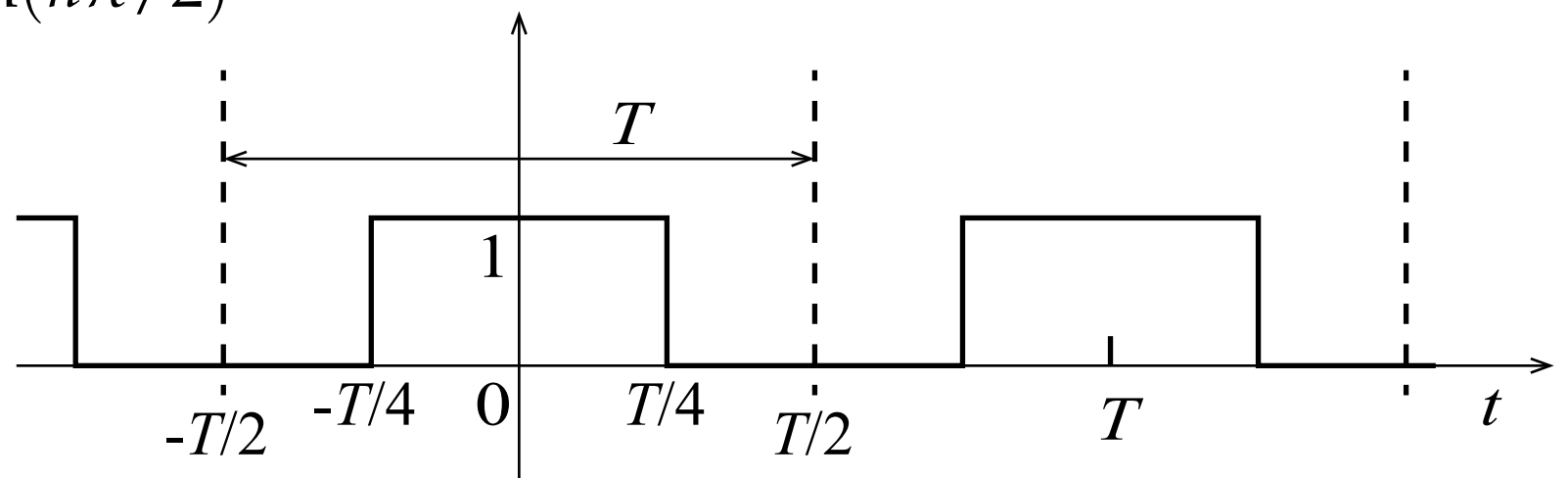
$$X(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j2\pi ft} df = \int_{-\infty}^{\infty} x(-t') e^{j2\pi ft'} df$$

$t' \rightarrow f, f \rightarrow t$ と置き換え

$$X(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(-f) e^{j2\pi ft} df$$

例として、図のような周期 T に対して $-T/4 \leq t \leq T/4$ の範囲で 1 となる矩形波列のフーリエ級数展開した後、上記範囲以外を 0 として単一の矩形パルスのフーリエ変換を行う。

$$\begin{aligned} X_n &= \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) e^{-j2n\pi f_0 t} dt = \frac{1}{T} \int_{-T/4}^{T/4} e^{-j2n\pi f_0 t} dt \\ &= \frac{1}{-j2n\pi f_0 T} \left[e^{-j2n\pi f_0 t} \right]_{-T/4}^{T/4} = \frac{1}{-j2n\pi} \left(e^{-jn\pi/2} - e^{jn\pi/2} \right) \\ &= \frac{1}{-j2n\pi} (\cos(-n\pi/2) + j\sin(-n\pi/2) - \cos(n\pi/2) - j\sin(n\pi/2)) \\ &= \frac{-j2\sin(n\pi/2)}{-j2n\pi} = \frac{1}{n\pi} \sin(n\pi/2) \end{aligned}$$

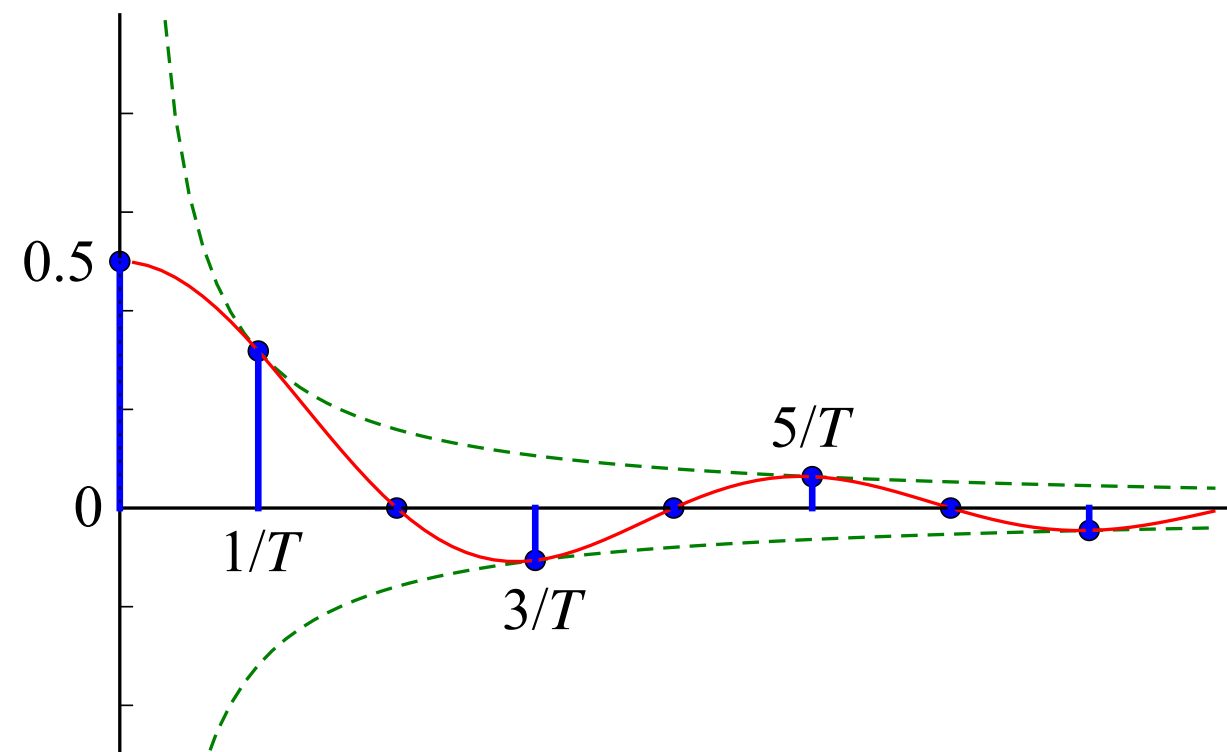


ここで n が偶数の時は $\sin$ 成分が 0 となり，図中の青丸青線のように離散的(discrete)な線スペクトル(line spectrum)という.

$-T/2 \sim T/2$ の範囲外を 0 としてフーリエ変換すると

$$\begin{aligned} X(f) &= \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j2\pi ft} dt = \int_{-T/4}^{T/4} e^{-j2\pi ft} dt \\ &= \frac{1}{-j2\pi f} \left[e^{-j2\pi ft} \right]_{-T/4}^{T/4} = \frac{1}{-j2\pi f} \left(e^{-j\pi f T/2} - e^{j\pi f T/2} \right) \\ &= \frac{1}{\pi f} \sin \left(\frac{\pi f T}{2} \right) \end{aligned}$$

となり，赤線のような連続的なスペクトルとなる.



パワースペクトル密度関数

power spectrum density function

$$x(t) = \cos f_0 t = \frac{1}{2} \left(e^{j2\pi f_0 t} + e^{-j2\pi f_0 t} \right)$$

をフーリエ変換すると

$$X(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j2\pi f t} dt$$

$f = \pm f_0$ の時以外は積分が 0 になるが、 $f = \pm f_0$ において振幅は無限大になる。

$$\begin{aligned} X(f) &= \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j2\pi f t} dt \\ &= \frac{1}{2} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} e^{j2\pi(f_0 - f)t} dt + \int_{-\infty}^{\infty} e^{-j2\pi(f_0 + f)t} dt \right\} \end{aligned}$$

前ページの例で、定義通りのフーリエ変換では振幅を評価できないため単位時間あたりの平均エネルギーをとってパワースペクトル密度関数 $P(f)$ を定義する.

$$P(f) = \lim_{T \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{T} |X(f)|^2 \right] = \lim_{T \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{T} X(f) X^*(f) \right]$$

全周波数で積分すれば、時間領域でパワーを求めたものと等しい

$$\overline{x^2} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x^2 dt = \int_{-\infty}^{\infty} P(f) df$$

$$\mathcal{F} [x(at)] = \frac{1}{a} X \left(\frac{f}{a} \right) \quad \text{となることを示せ}$$