自己相関
auto-correlation

自己相関関数の定義

２つの変量 x と y の相関度は次のように書くことができる.

$$r_x = E\left[\frac{y}{x}\right] = \frac{E[xy]}{E[x^2]},\ r_y = E\left[\frac{x}{y}\right] = \frac{E[xy]}{E[y^2]}$$

※ E は期待値

これでは r_x と r_y の2種類の評価値になってしまうので

$$r = \frac{E[xy]}{\sqrt{E[x^2]E[y^2]}}$$

または，分母のみを用いて　$C = E[xy]$

$x(t)$ が周期 T を持つならば　$x(t) = x(t + nT)$

となり，周期の整数倍ずらすと元の波形と重なる.

逆に τ を変えながら $x(t)$ と $x(t{+}\tau)$ の相関を求めて周期を判別

自己相関関数の定義②

自己相関関数（auto-correlation function）を以下と定義

$$C(t,\tau) = E[x(t)\,x(t+\tau)]$$

※ τ：ラグ lag

E を時間平均で書き換えると

$$C(\tau) = \overline{x(t)x(t+\tau)} = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_0^T x(t)x(t+\tau)dt$$

$\tau = 0$ の時，ノイズ成分も一致するから $C(0)$ が最大

これにより正規化したものを自己相関係数（auto-correlation coefficient）と呼ぶ.

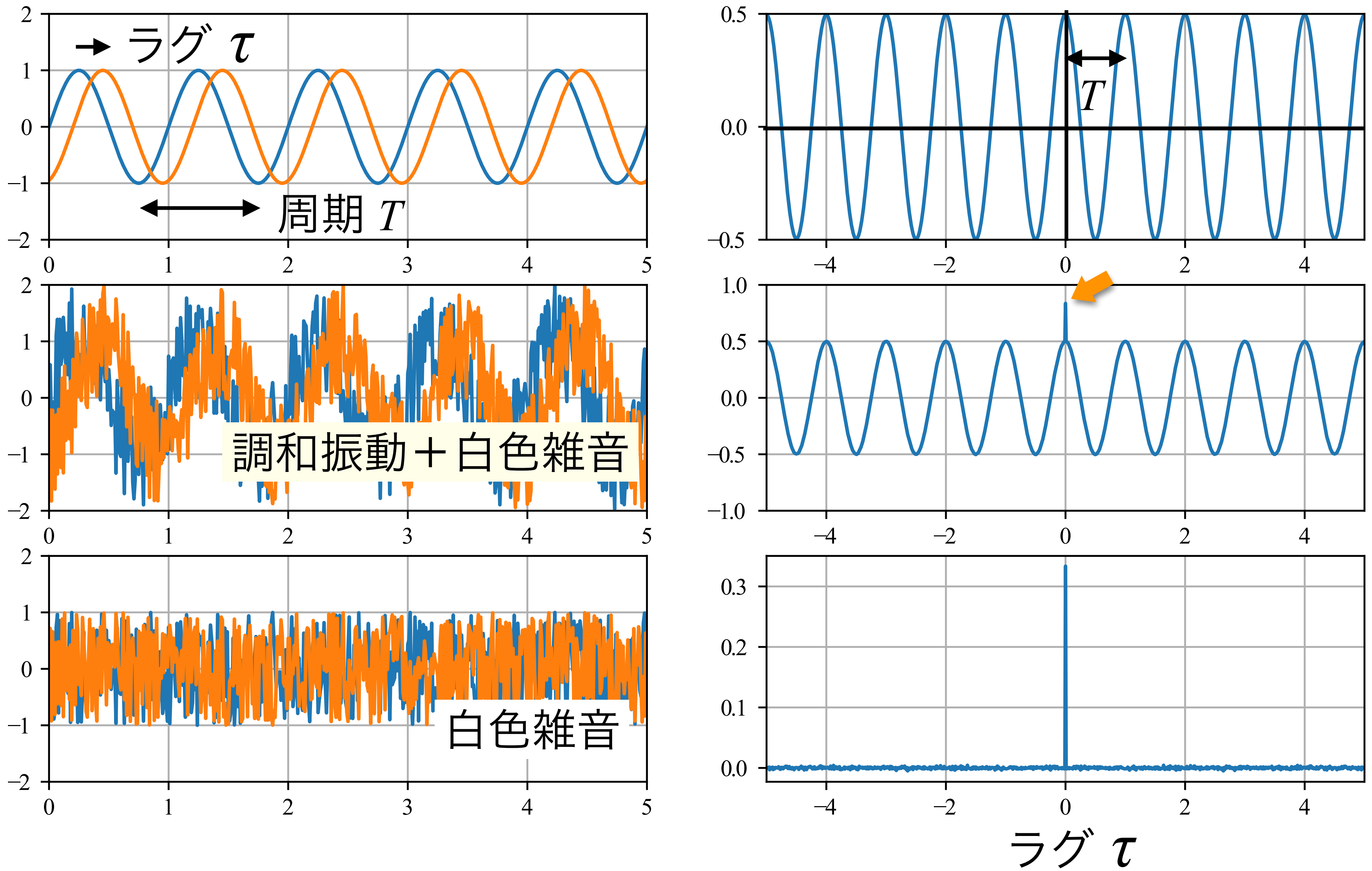
$$R(\tau) = C(\tau)/C(0) = \overline{x(t)x(t+\tau)}/\overline{x^2(t)}$$

$R(0)=1$

信号と自己相関関数

調和振動の自己相関関数は
コサイン関数

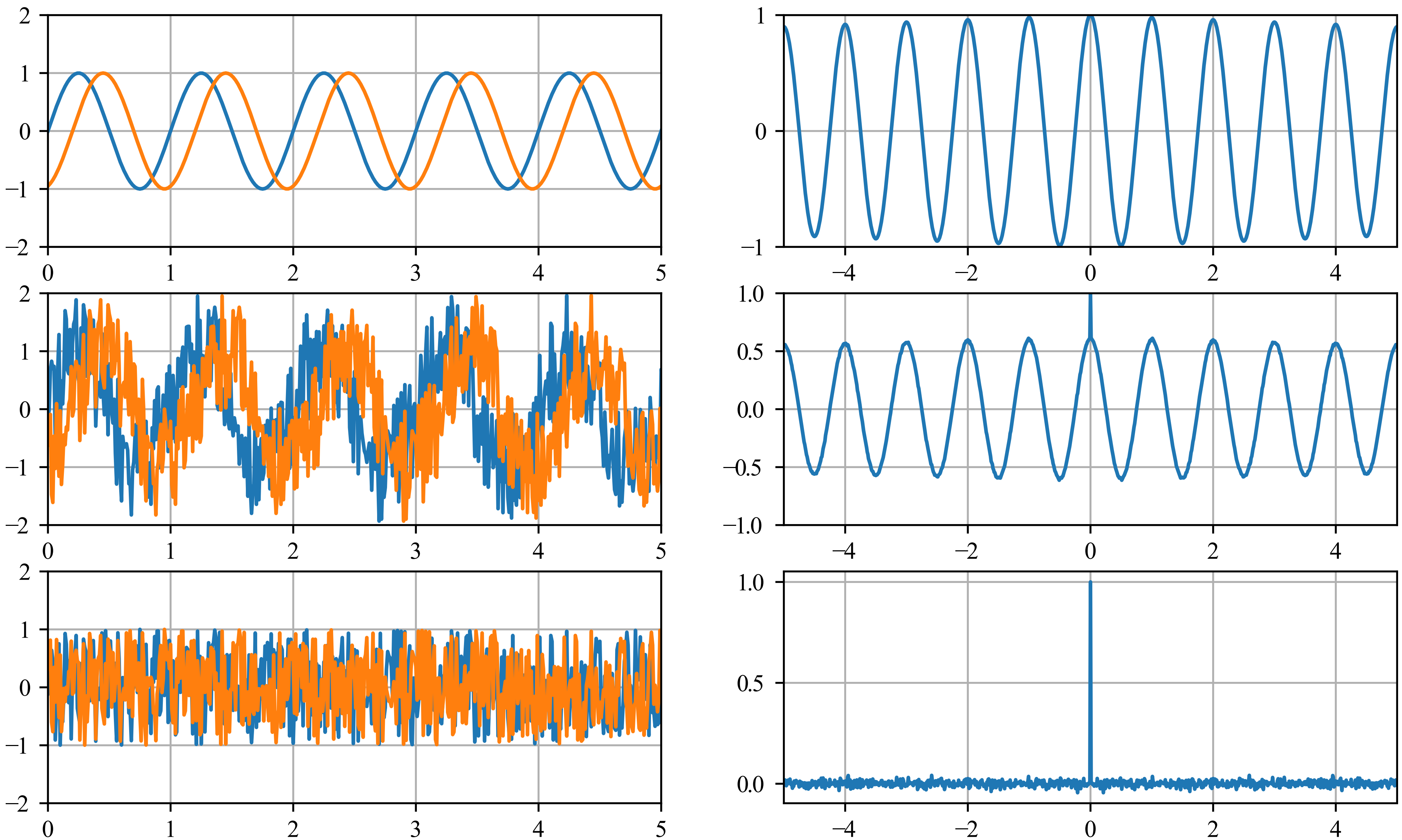
$$C(\tau) = \overline{x(t)x(t+\tau)} = \lim \frac{1}{T}\int_0^T x(t)x(t+\tau)dt$$



白色雑音(white noise)の自己相関関数は $C(0)$ 以外は 0 になる.
自己相関関数は偶関数になる.

信号と自己相関係数

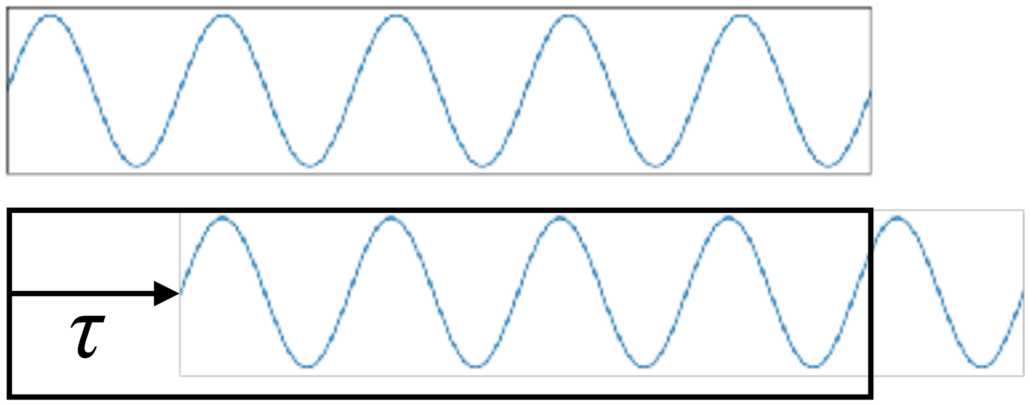
$$
\begin{aligned}
R(\tau) &= C(\tau)/C(0) \\
&= \overline{x(t)x(t+\tau)}/\overline{x^2(t)}
\end{aligned}
$$



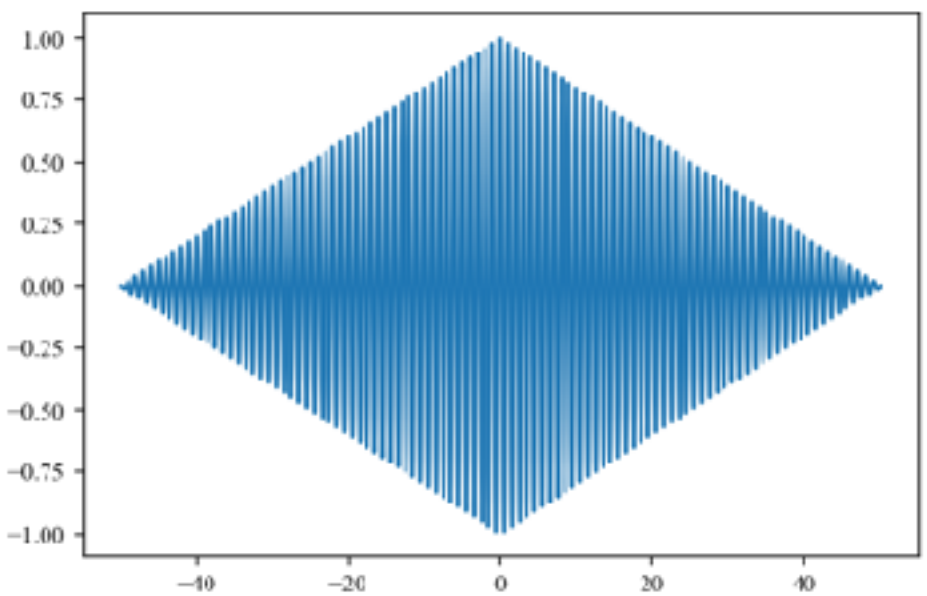
自己相関係数 $R(\tau)$ は

$\tau = 0$ で最大値が 1

もろもろ補足



数値計算で有限窓幅のために両端の振幅が小さくなることがある.



雑音（ノイズ）にも色々な種類があるが，理想的な雑音としては白色雑音（white noise）がある．スペクトル上で

- 振幅は全周波数にわたり一定
- 位相がランダム

相互相関
cross correlation

相互相関関数・相互相関係数

２つの信号 $x(t)$ と $y(t)$ の相関性を調べるために，相互相関関数 $C_{xy}(\tau)$ と相互相関係数 $R_{xy}(\tau)$ を定義する.

$$C_{xy}(\tau) = \overline{x(t)\,y(t+\tau)}$$

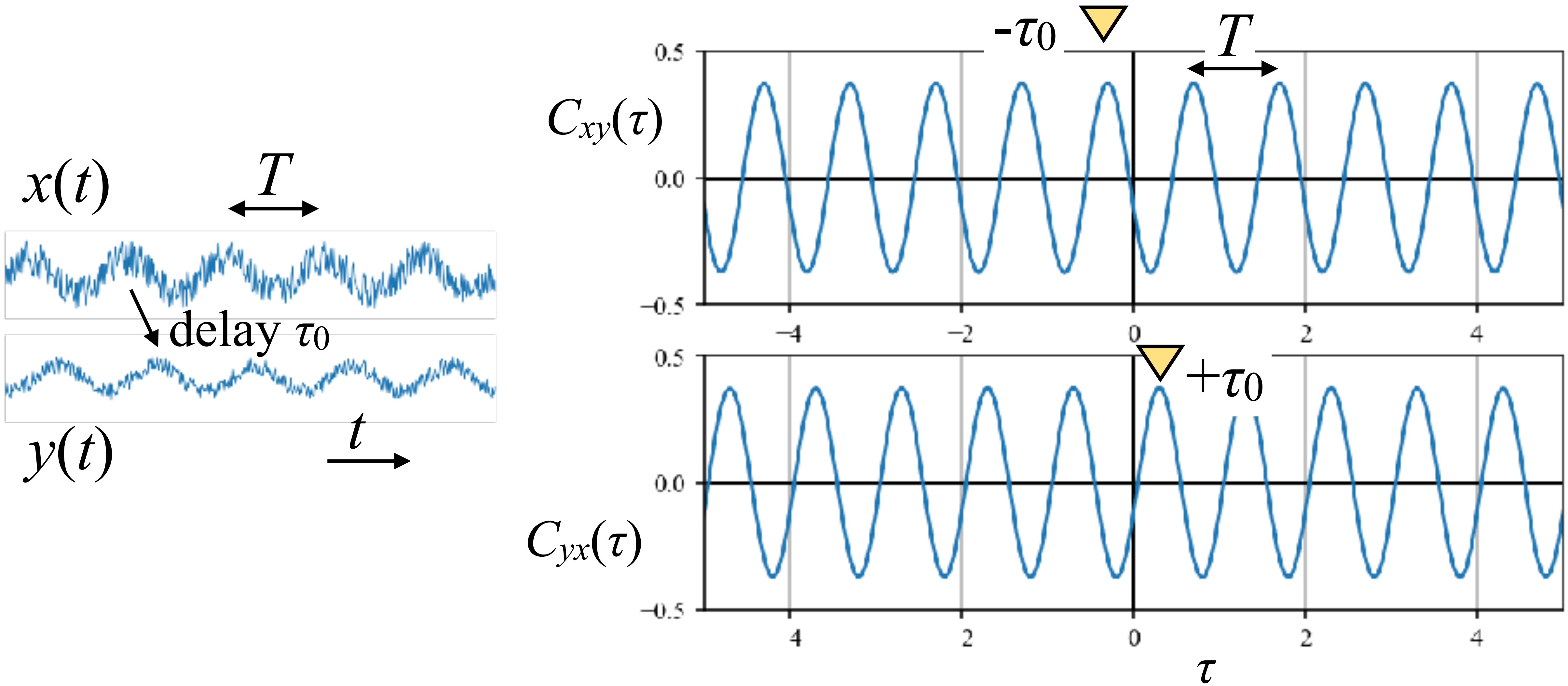
$$R_{xy}(\tau) = \overline{x(t)\,y(t+\tau)} / \sqrt{\overline{x^2}}\sqrt{\overline{y^2}} = C_{xy}(\tau) / \sqrt{C_x(0)C_y(0)}$$

相互相関関数の性質

$$C_{xy}(\tau) = C_{yx}(-\tau)$$

２つの信号 $x(t)$ と $y(t)$ のノイズ成分は独立していると考えると $\tau = 0$ でピークを形成することはない.

相互相関関数



$C_{xy}(\tau)$ と $C_{yx}(\tau)$ は対称である． $C_{xy}(\tau) = C_{yx}(-\tau)$

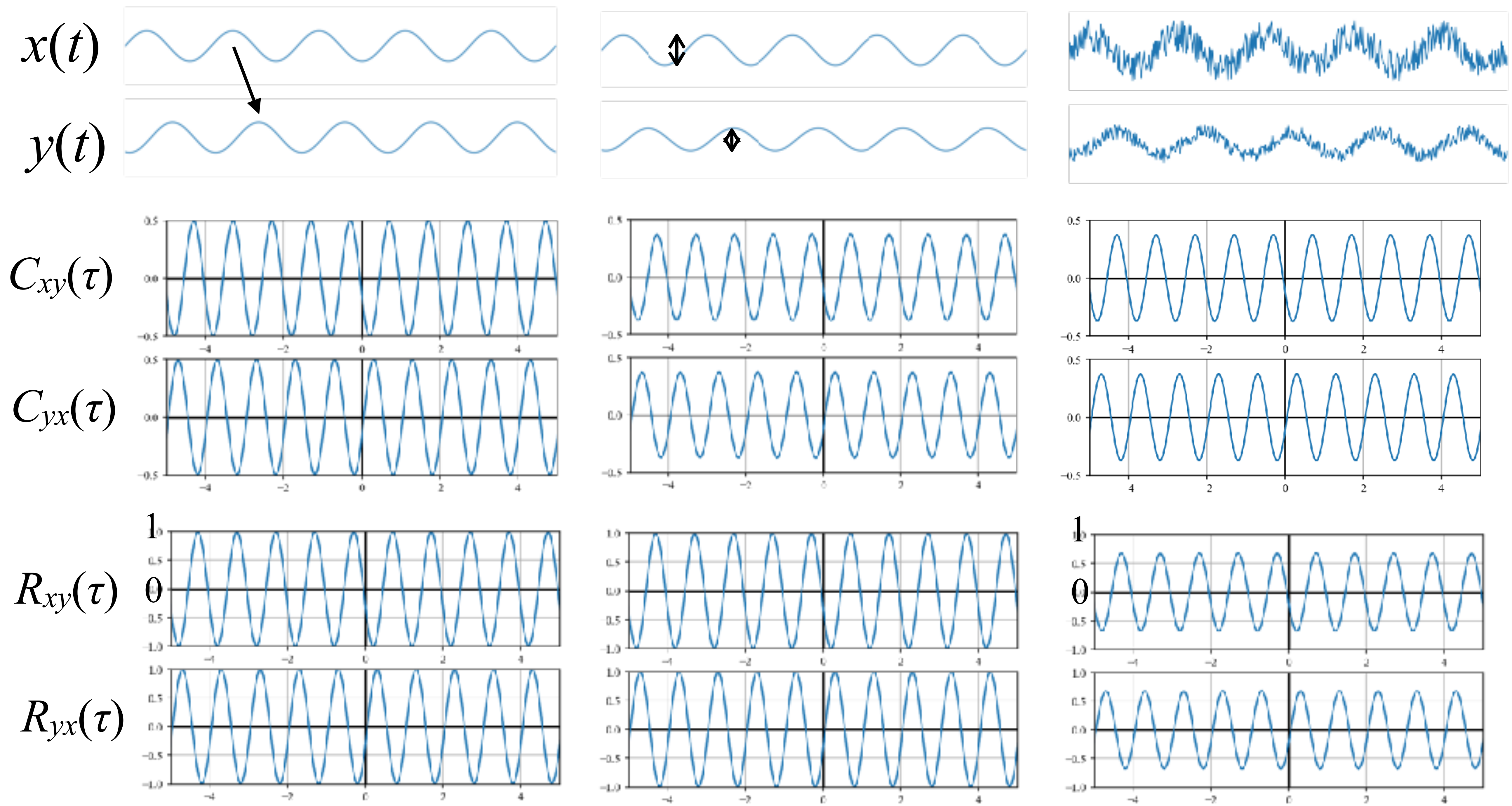
$y(t)$ が $x(t)$ より τ_0 遅れているので

$C_{xy}(\tau)$ は $\tau = -\tau_0$ でピーク　$C_{yx}(\tau)$ は $\tau = +\tau_0$ でピーク

$C_{xy}(\tau)$ のピーク間隔は周期 T である．

時間波形と相互相関関数・相互相関係数

振幅同じ，ノイズなし　　振幅違う　　振幅違う，ノイズ有り

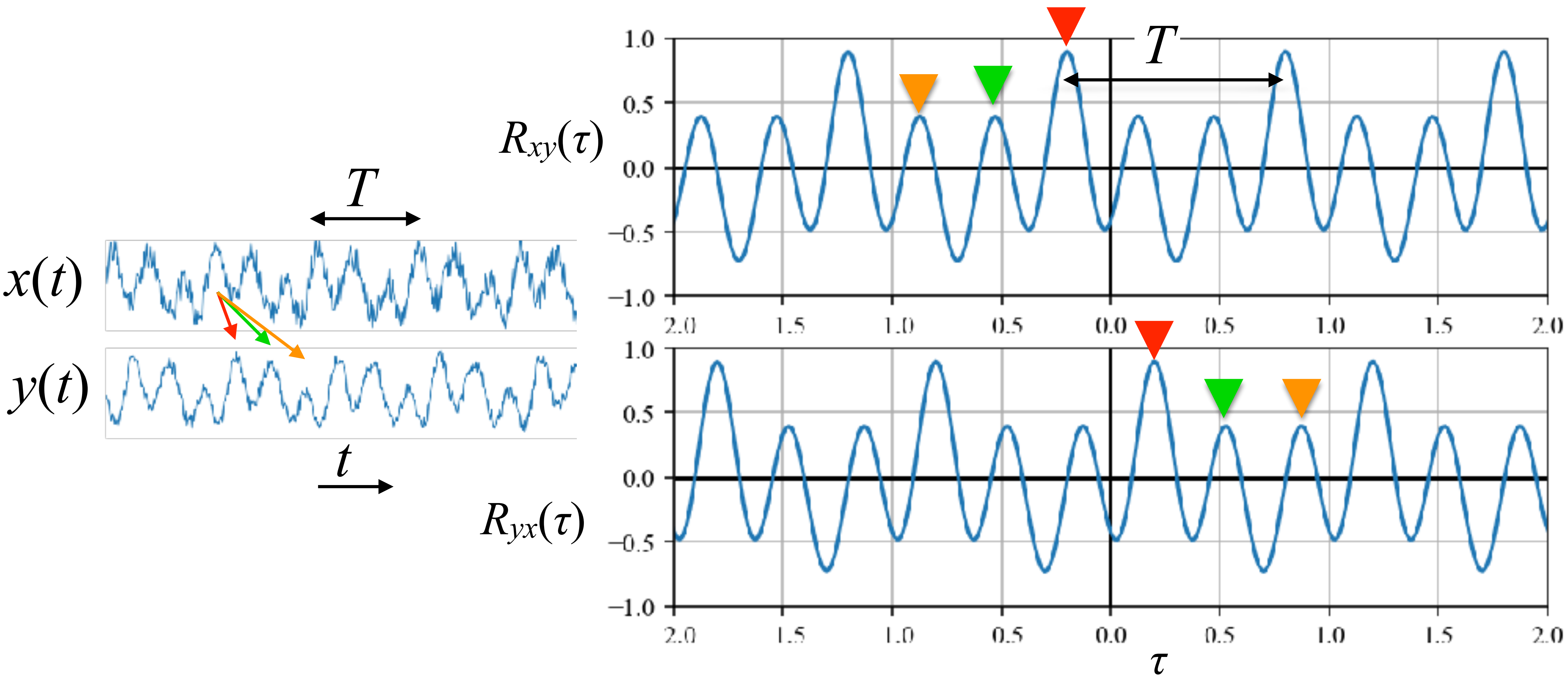


xとyの振幅によって相関関数の大きさ決まる．

位相ズレだけでノイズなしだと相関係数最大１

ノイズがあると相関係数下がる

より複雑な波形の相互相関係数



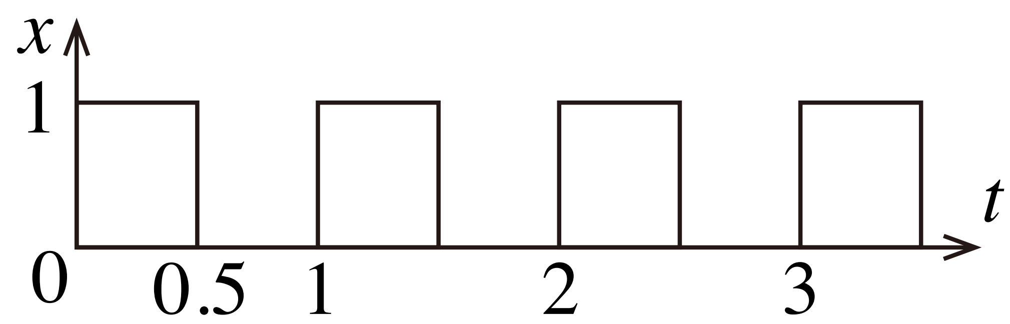
高調波成分にもマッチして複数のピーク

演習 1

図のような周期 1，デューティ比50%の矩形波列を下のように複素フーリエ級数展開した時の係数 X_n を求めよ．

$$x(t) = \sum^{n} X_n e^{j2n\pi t}$$

$$X_n = \frac{1}{T}\int_0^T x e^{-jn\omega t} dt$$



演習 2

$x(t) = a \sin 2\pi t$ の自己相関関数 $C(\tau)$ を式で示せ．