

振動・音響計測特論

- 4月6日 第1回複素数によるフーリエ級数展開
- 4月13日 第2回自己相関と相互相関
- 4月20日 第3回フーリエ変換とパワースペクトル
- 4月27日 第4回クロススペクトルと伝達関数
- 5月4日 みどりの日
- 5月11日 第5回振動診断（クルトーシス，クレストファクタ，スキューネス）
- 5月18日 第6回回転体の振動（次数比解析，ウォーターフォール図，同期平均加算）
- 5月25日 第7回音の基礎（音圧，dB，周波数と音階・和音）
- 6月1日 期末試験

各自，例を挙げてみる。

最近，不快と感じた振動・音

不快感以外で（主に）振動が悪影響を及ぼす例

（機械的）振動を意図的に利用している例

複素数で振動を表現

$C_1 = A_1 e^{i\theta_1} = \alpha_1 + i\beta_1$, $C_2 = A_2 e^{i\theta_2} = \alpha_2 + i\beta_2$ とする.

ただし $A_1, A_2, \alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2$ は実数

$$e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta, \quad \cos \theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}, \quad \sin \theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$$

$$C_1 + C_2 = (\alpha_1 + \alpha_2) + i(\beta_1 + \beta_2)$$

$$C_1 - C_2 = (\alpha_1 - \alpha_2) + i(\beta_1 - \beta_2)$$

$$C_1 \times C_2 = A_1 A_2 e^{i(\theta_1 + \theta_2)}$$

かけ算では位相が正回転

$$C_1 / C_2 = (A_1 / A_2) e^{i(\theta_1 - \theta_2)}$$

割り算では位相が逆回転

$$C_1 = A_1 e^{i\theta_1} = \alpha_1 + i\beta_1, \quad C_2 = A_2 e^{i\theta_2} = \alpha_2 + i\beta_2$$

に対して, 共役複素数

$$C_1^* = A_1 e^{-i\theta_1} = \alpha_1 - i\beta_1, \quad C_2^* = A_2 e^{-i\theta_2} = \alpha_2 - i\beta_2$$

とすると

C_1^* は C_1 の共役複素数

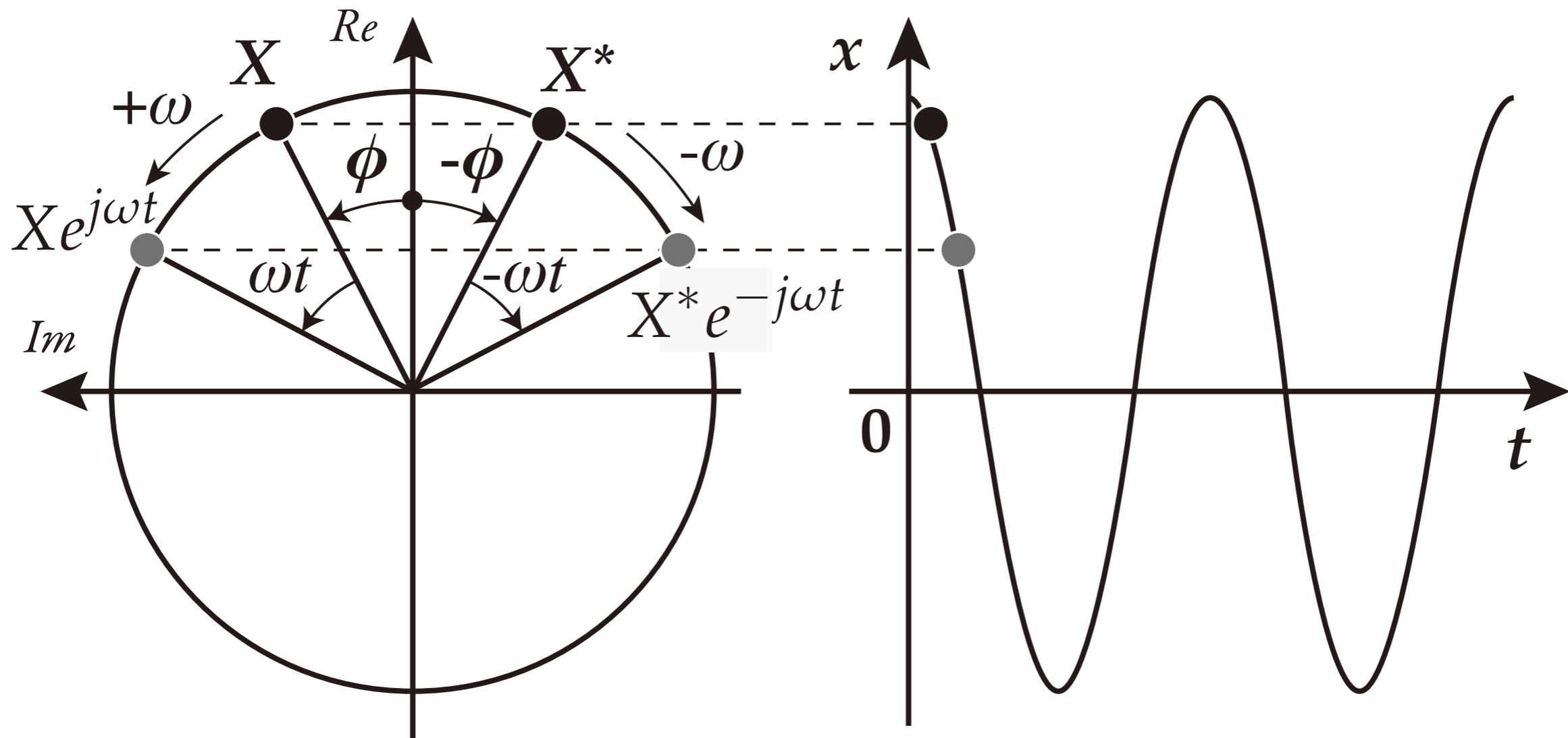
$$|C_1| = |C_1^*|, \quad |C_2| = |C_2^*|$$

$$\left| \frac{C_1}{C_2} \right| = \frac{|C_1|}{|C_2|} = \frac{A_1}{A_2}$$

分数の大きさは, 分母・分子それぞれ大きさを求めてから計算すれば良い.

$$|C_1|^2 = \alpha_1^2 + \beta_1^2 = C_1 \times C_1^*$$

$x = |X| \cos(\omega t + \phi)$ を複素数で表現すると



$$x = \frac{X e^{j\omega t} + X^* e^{-j\omega t}}{2}$$

虚数部のない振動を厳密に取り扱うためには負の周波数成分（逆回転）必要

1 自由度振動系の運動方程式

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = Fe^{i\omega t}$$

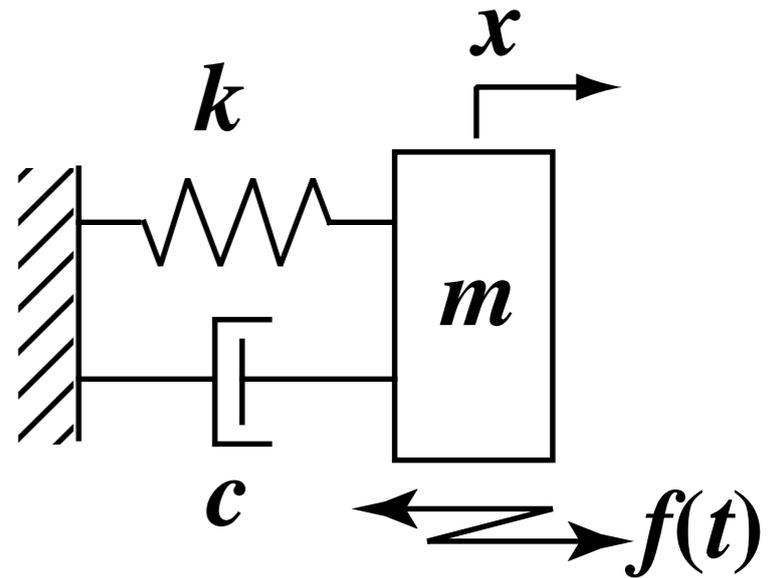
$$x = Xe^{i\omega t} \quad \text{と解をおくと}$$

$$\dot{x} = i\omega Xe^{i\omega t} = i\omega x, \quad \ddot{x} = -\omega^2 x$$

※ 微分（・積分）が簡単

$$(-m\omega^2 + ic\omega + k)Xe^{i\omega t} = Fe^{i\omega t}$$

$$\text{複素振幅 } X = \frac{F}{k - m\omega^2 + ic\omega} \quad \leftarrow \begin{array}{l} \text{分子は正実数} \\ \text{分母は複素数} \end{array}$$



注 > 厳密には共役複素数を用いて虚数部分を消去するが
振幅と位相を考える程度なら、近似的な取扱で考え
られる。

複素数表現でのフーリエ変換

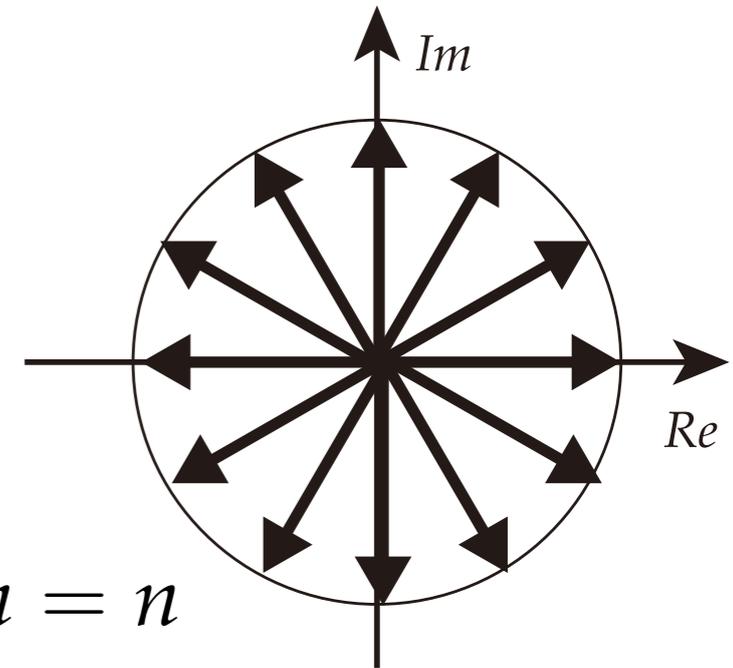
$$x = \sum_{n=-\infty}^{\infty} X_n e^{jn\omega t} \quad \text{※ } n \text{ が } -\infty \text{ からなのに注意}$$

$$X_n = \frac{1}{T} \int_0^T x e^{-jn\omega t} dt$$

↑ 符号に注意

m, n を整数としたとき

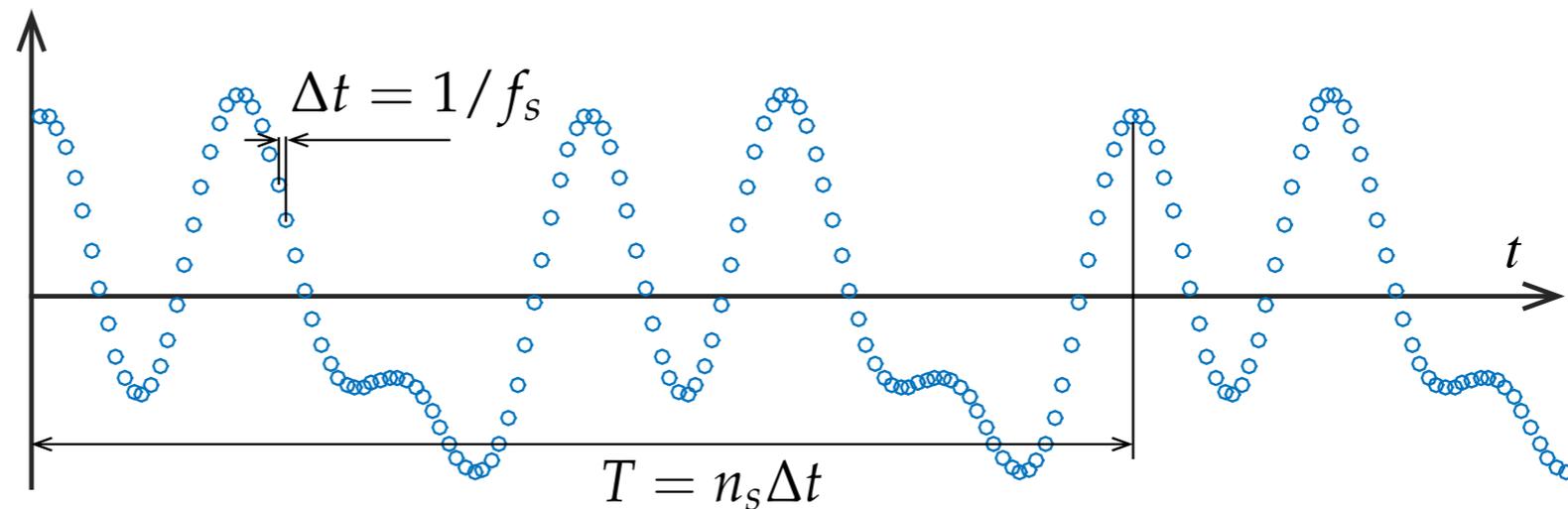
$$\int_0^T e^{jm\omega t} e^{-jn\omega t} dt = \int_0^T e^{j(m-n)\omega t} dt = \begin{cases} T & m = n \\ 0 & m \neq n \end{cases}$$



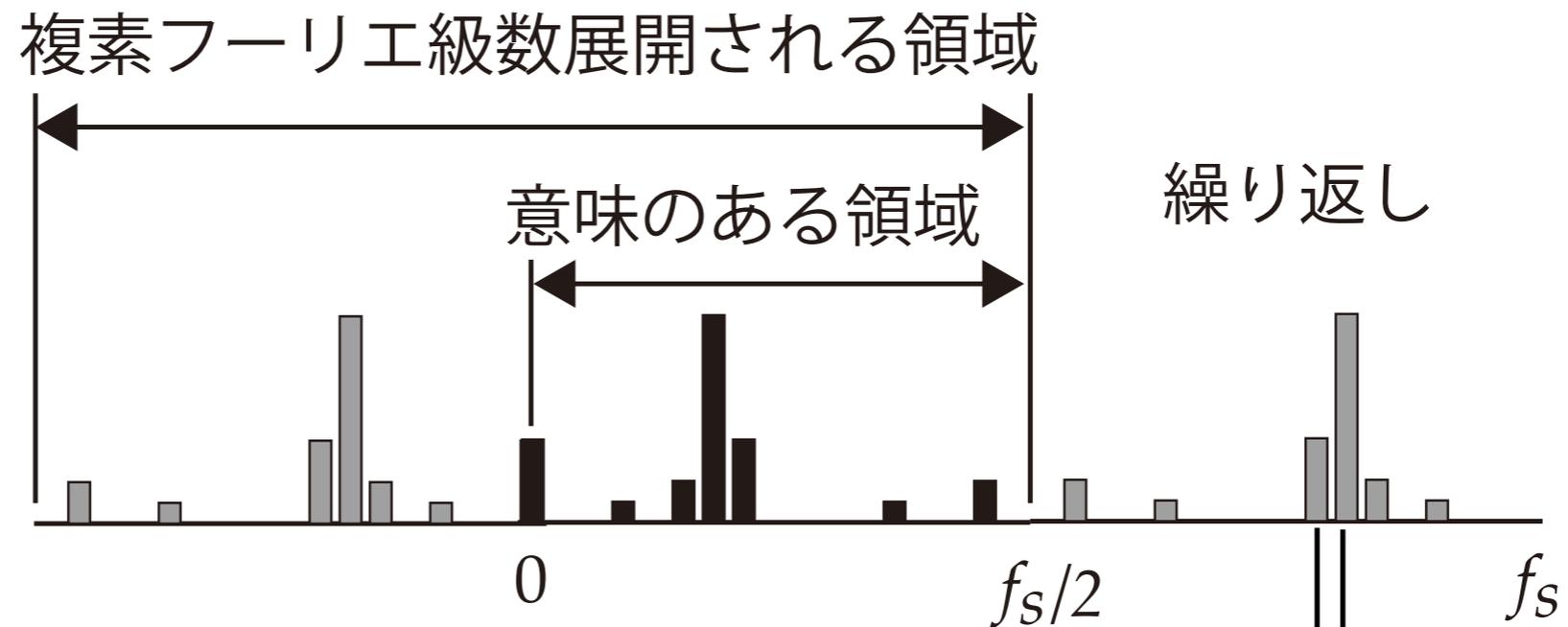
※ 積分区間が繰り返し周期 T の整数倍の時

$$\int_0^T x e^{-jn\omega t} dt = \int_0^T \sum_{-\infty}^{\infty} X_n e^{jm\omega t} e^{-jn\omega t} dt = X_n T$$

時間波形



スペクトル

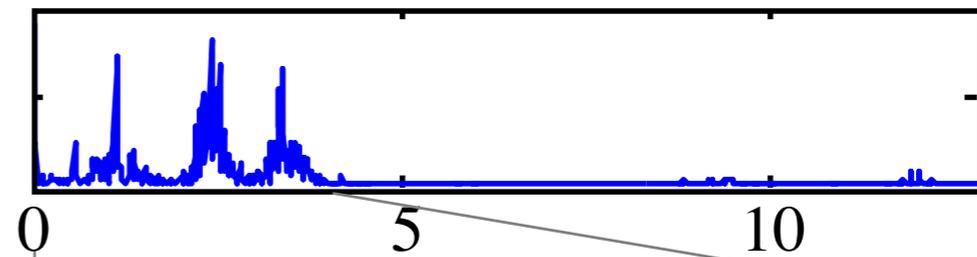
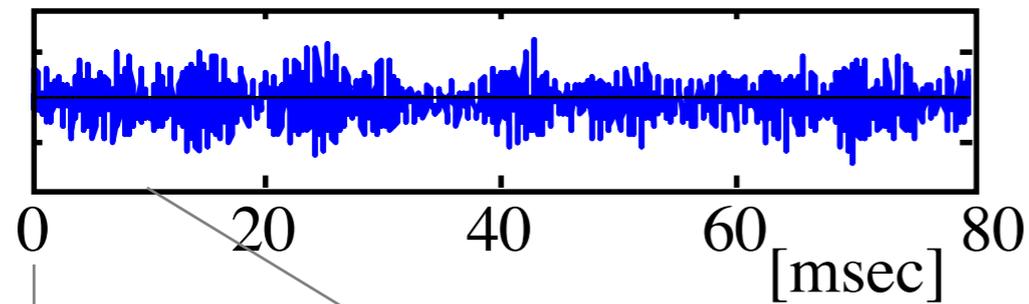


n点の離散的な時間波形から
n点のフーリエ級数が得られる
が、半分は負の周波数成分

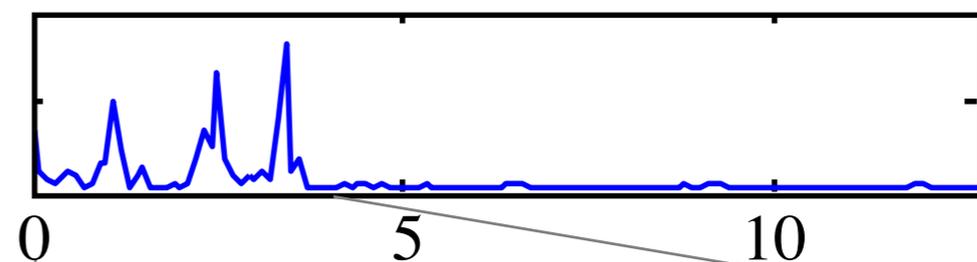
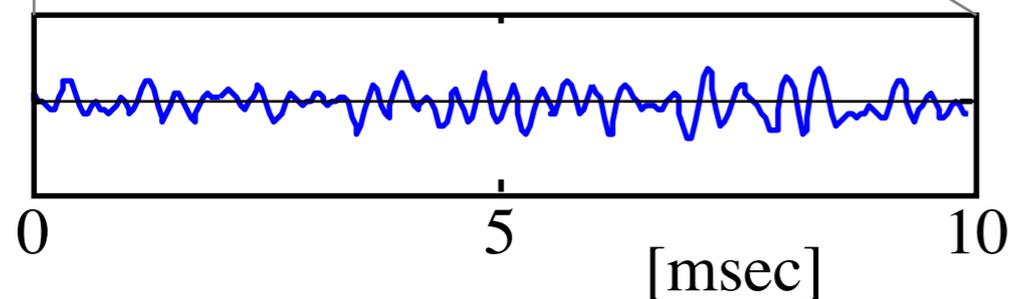
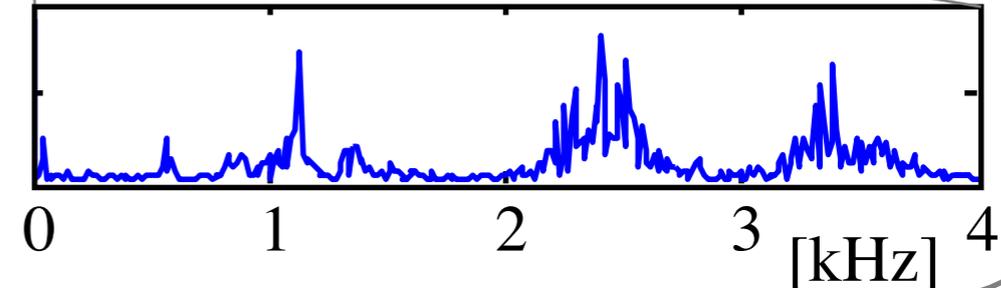
周波数解像度

$$\Delta f = 1/T$$

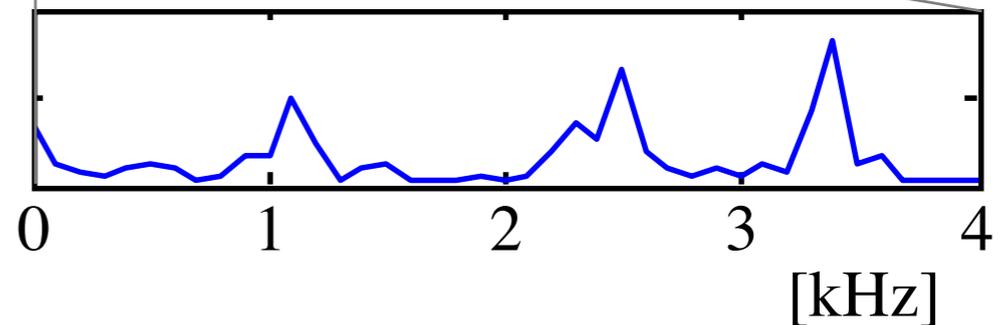
サンプリング周波数 25.6kHz (周波数レンジ 10kHz)



周波数解像度を上げるためには
長い窓幅が必要

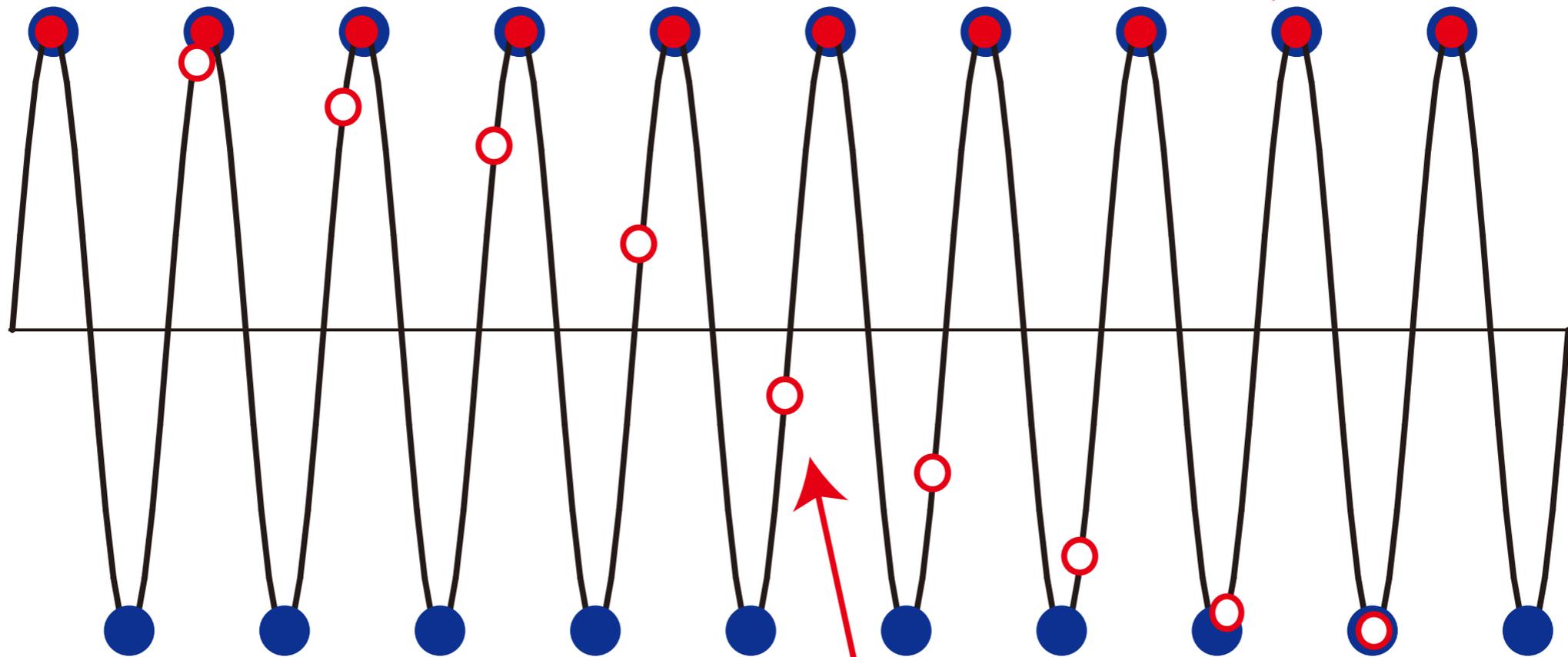


数kHz程度の波形を観察するのに
この程度の窓幅が見易い。
しかしFFTによる周波数解像度は
粗い。



窓幅が周波数解像度(フーリエ級数の1次成分の周波数)を決める。

サンプリング周波数 f_s が振動の周波数 f と等しい



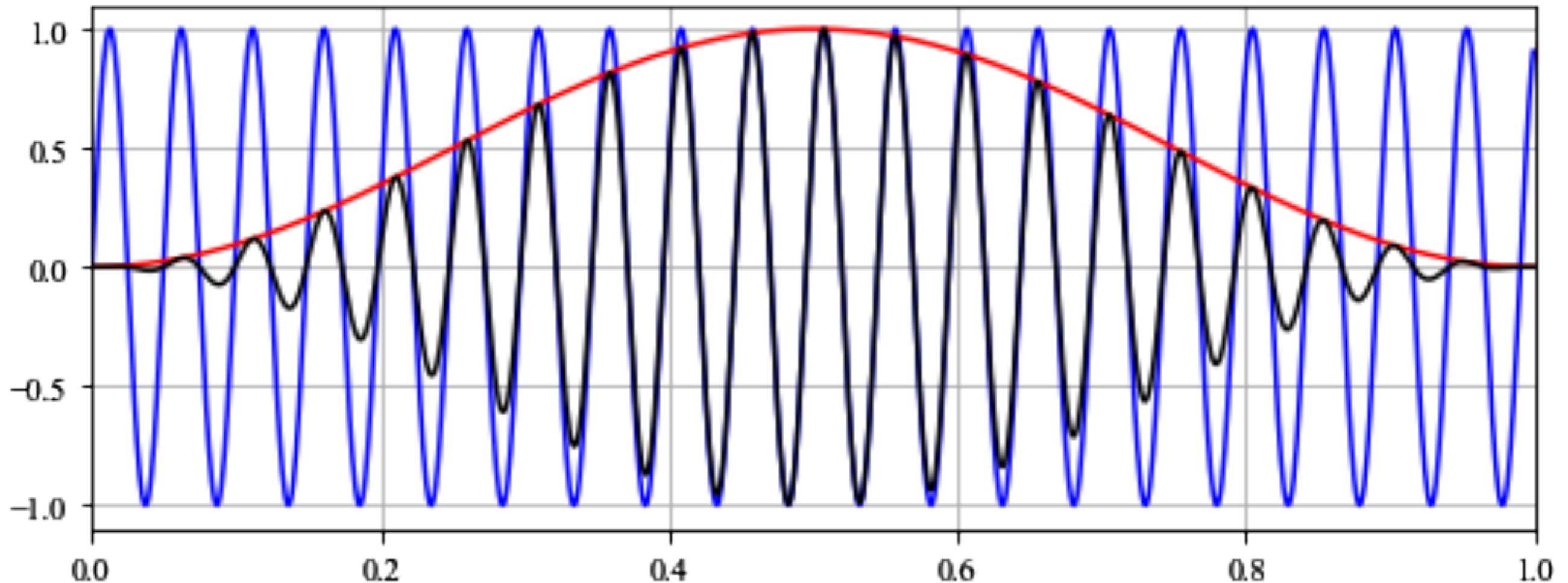
f_s が f の 2 倍 (分析可能)

$$f = f_s / 2$$

f_s が f 以上, f の 2 倍以下

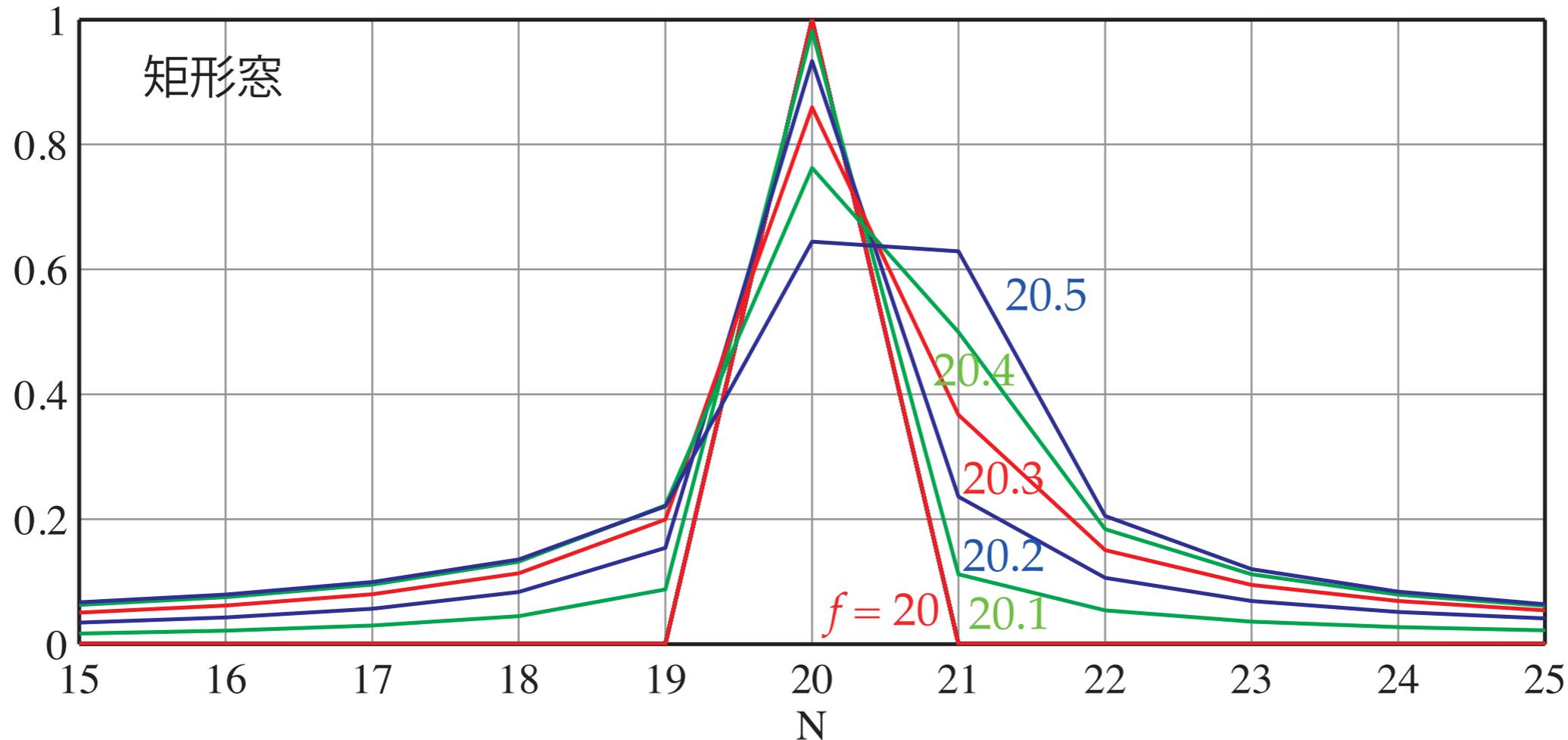
f が f_s の 半分以上

f より低い周波数に見える

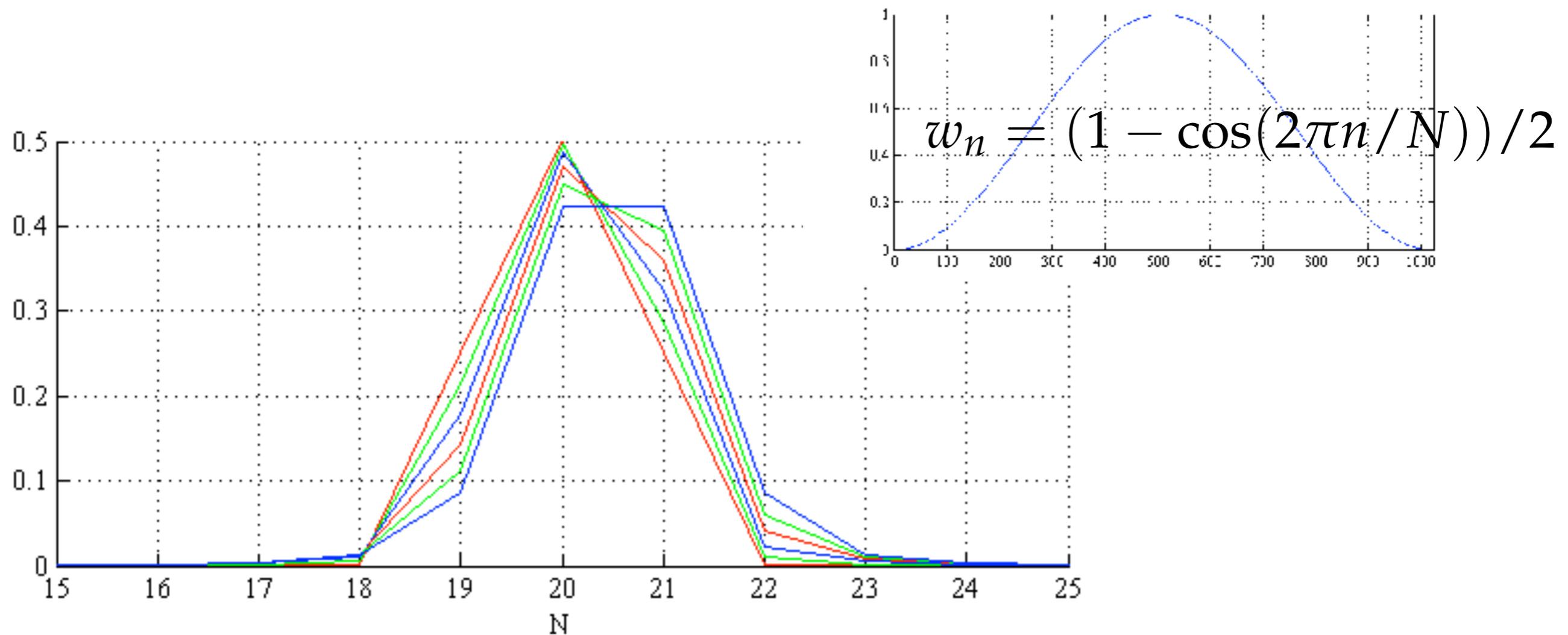


データ点数1024点の中に約20周期
含まれるサイン波を考える。

※図は20.2周期含まれる場合

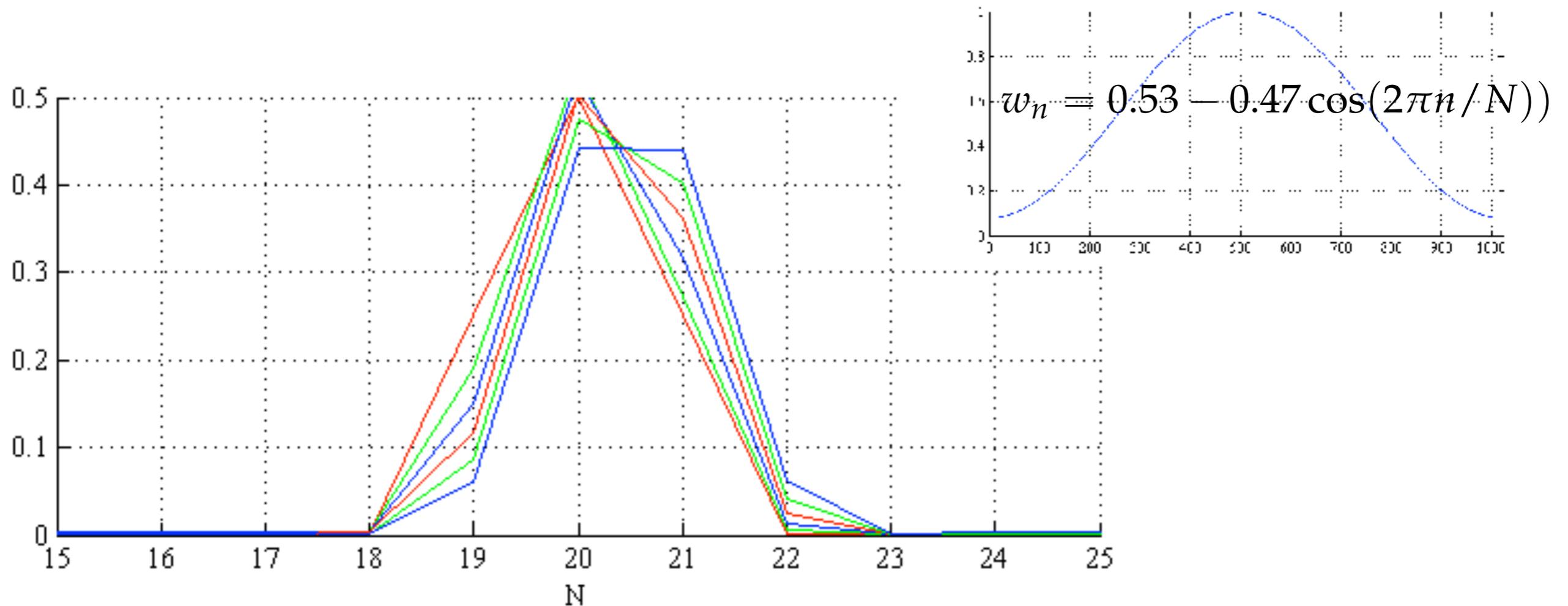


Nは窓幅に対する次数で整数部に分析結果。
20周期ちょうどの窓幅では $N=20$ のみにピーク。
 $f=20.1\sim 20.5$ ではピーク形状が大きく変化。



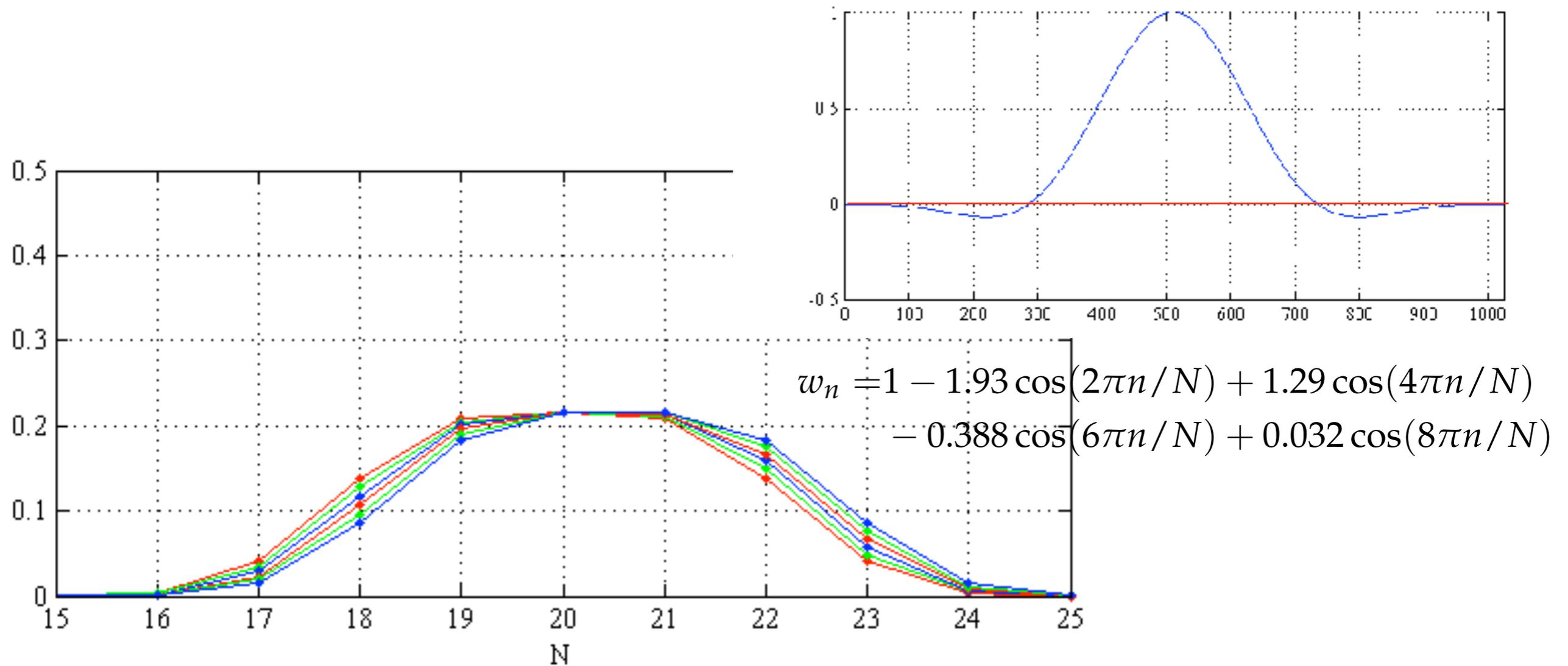
ピークの形状は安定。

振幅は矩形窓より小さくなる (1/2倍)。

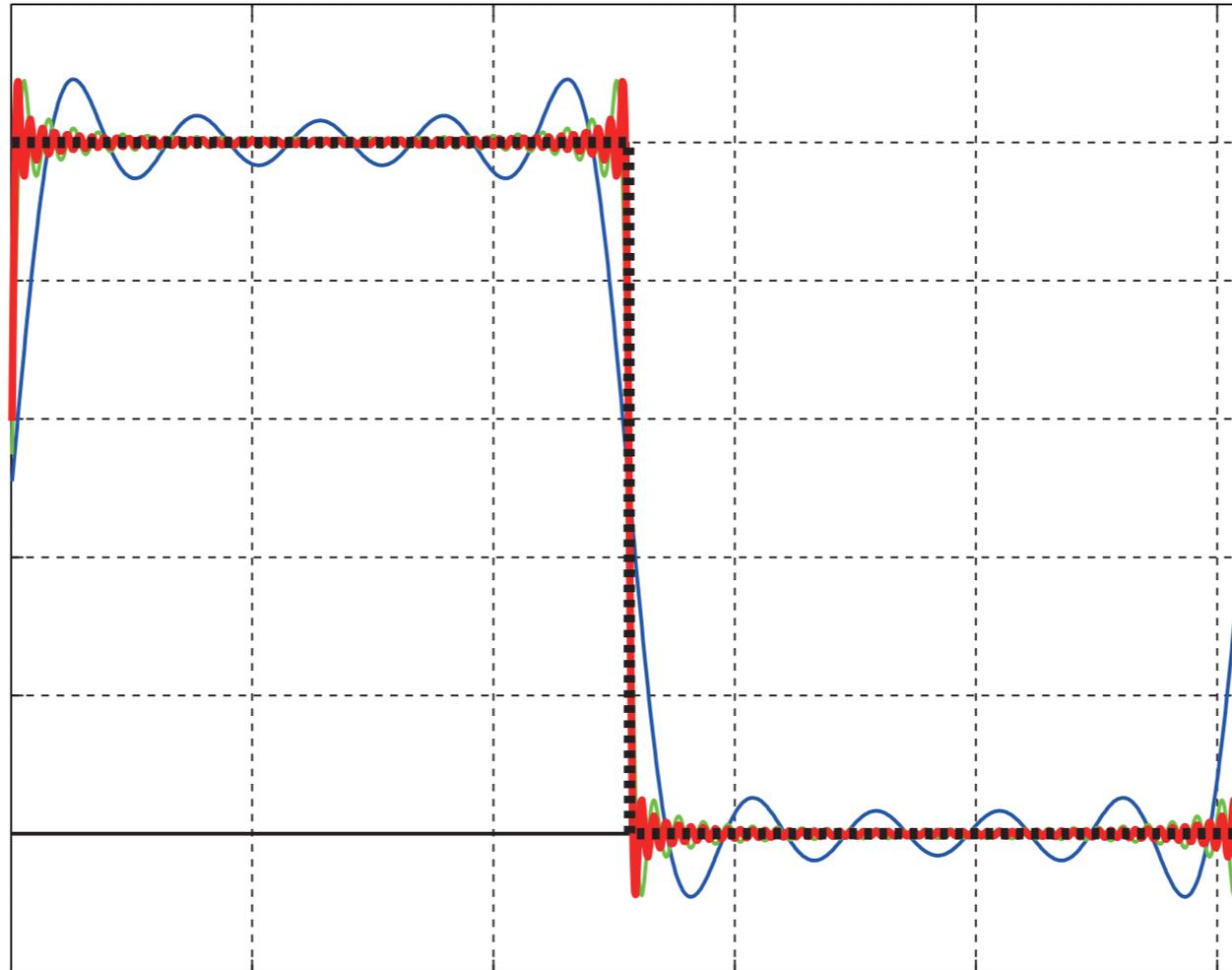


Hanning窓を微修整.

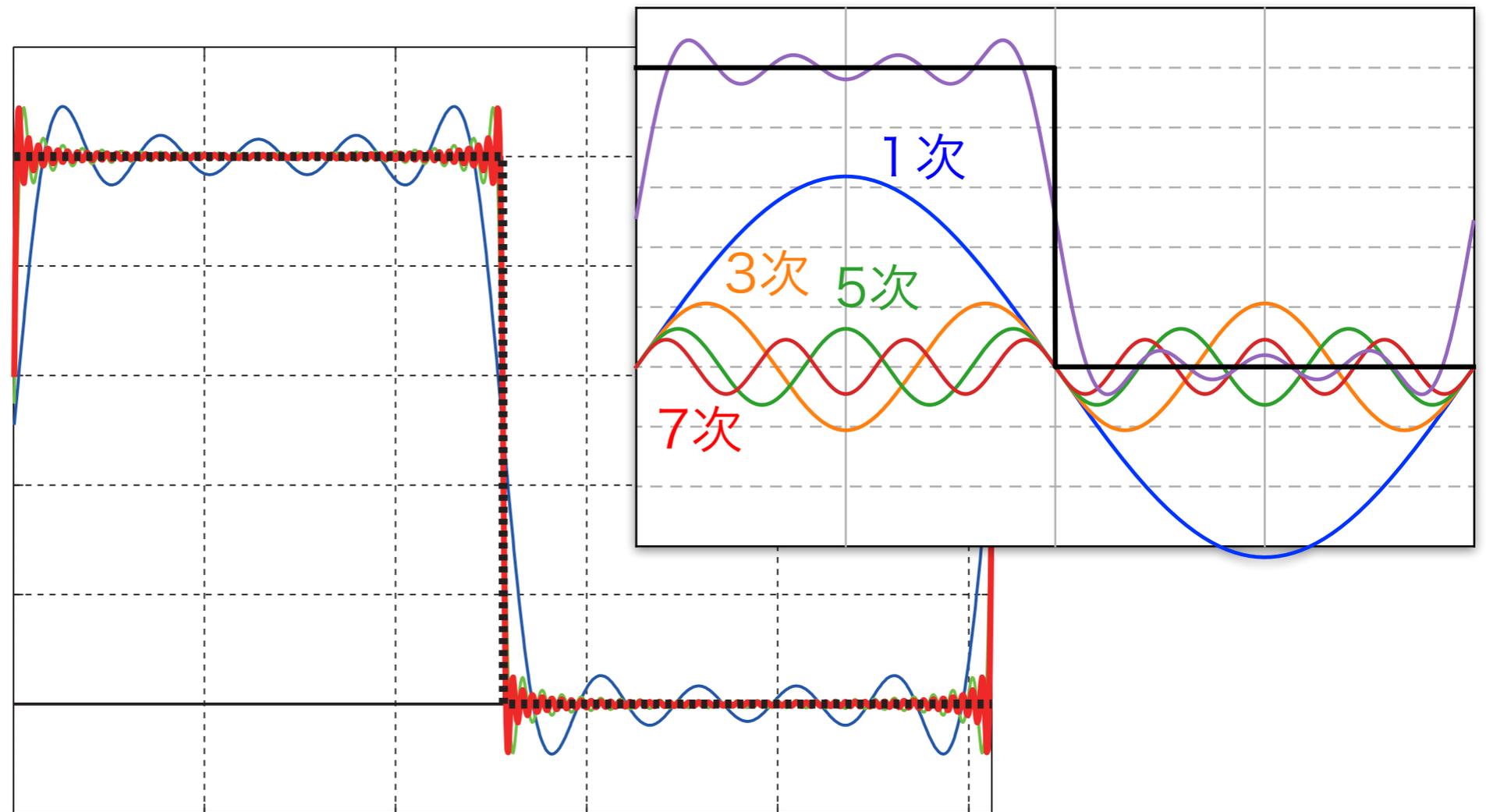
ピーク狭く，周波数解像度やや高い.



周波数解像度悪いがピーク高さ安定



矩形波などの不連続な点で周波数スペクトルを逆フーリエ変換した時間波形にトゲが生じる。
デジタルオシロなどでデジタルフィルタにより同様な波形が見える事があるが、真の波形ではない。



矩形波などの不連続な点で周波数スペクトルを逆フーリエ変換した時間波形にトゲが生じる。
デジタルオシロなどでデジタルフィルタにより同様な波形が見える事があるが、真の波形ではない。