

電子の運動と輸送現象 ← 金属の電気や熱は自由電子が運ぶ

(1) 群速度と位相速度

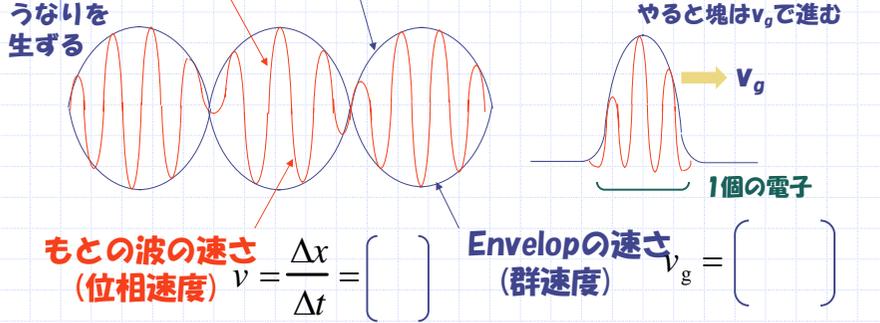
一般の波 $U = U_0 e^{i(kx - \omega t)}$

わずかに周波数の違う波 $\omega \pm \Delta\omega$, $k \pm \Delta k$ の重ね合わせ

$$U = U_0 [e^{i[(k+\Delta k)x - (\omega+\Delta\omega)t]} + e^{i[(k-\Delta k)x - (\omega-\Delta\omega)t]}]$$

$$= U_0 e^{i(kx - \omega t)} [e^{i(\Delta k \cdot x - \Delta\omega \cdot t)} + e^{-i(\Delta k \cdot x - \Delta\omega \cdot t)}]$$

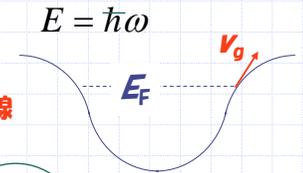
$$= 2U_0 e^{i(kx - \omega t)} \cos(x\Delta k - t\Delta\omega)$$



(2) エネルギーバンドが $E(k)$ のとき $E = \hbar\omega$

$$v_g = \frac{\partial\omega}{\partial k} = \frac{1}{\hbar} \frac{\partial E(k)}{\partial k}$$

エネルギーバンドの接線

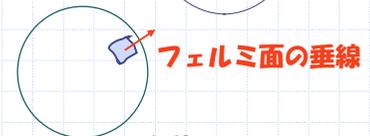


3次元では

$$\vec{v}_g = \frac{1}{\hbar} \left(\frac{\partial E(k)}{\partial k_x}, \frac{\partial E(k)}{\partial k_y}, \frac{\partial E(k)}{\partial k_z} \right)$$

さらに2階微分して

$$\frac{\partial v_g}{\partial t} = \frac{1}{\hbar} \frac{\partial^2 E(k)}{\partial k^2} \frac{\partial k}{\partial t}$$



力積
力 動いた距離

外部電場 ε を δt だけかけたときの仕事は $\delta E = -e\varepsilon v_g \delta t$

一方 $\delta E = \left(\frac{\partial E}{\partial k} \right) \delta k = \hbar v_g \delta k$ だから $-e\varepsilon v_g \delta t = \hbar v_g \delta k$ より $\hbar \frac{\partial k}{\partial t} = \left[\right]$

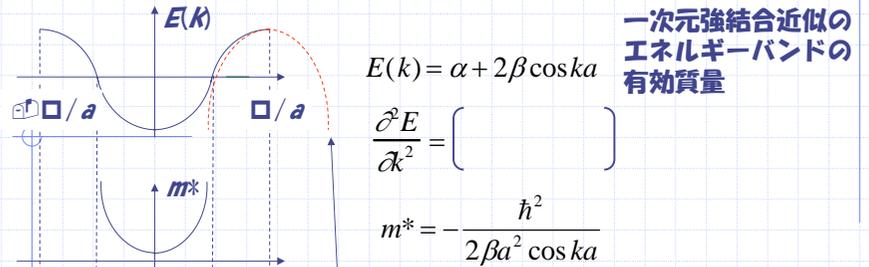
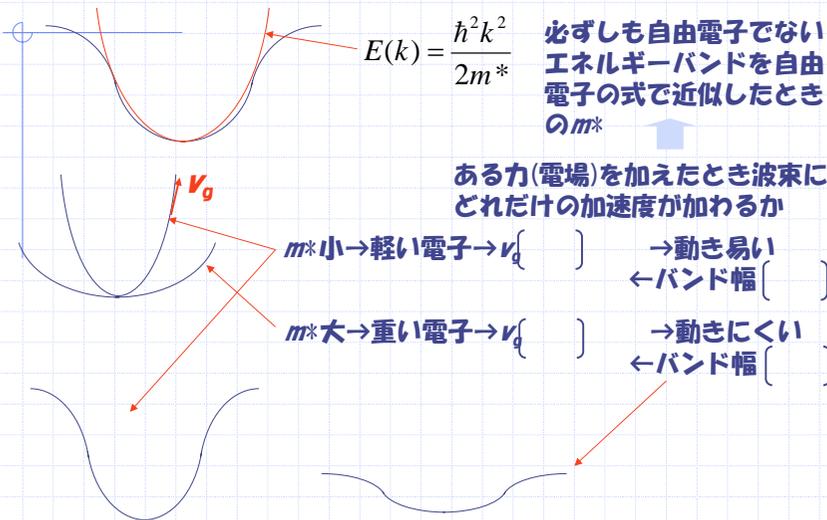
これより $\frac{\partial v_g}{\partial t} = \frac{1}{\hbar^2} \frac{\partial^2 E(k)}{\partial k^2} (-e\varepsilon)$

$ma = F$ → 加速度 $1/m^*$ 力

別解: $p = \hbar k$ を微分して $\frac{\partial p}{\partial t} = \hbar \frac{\partial k}{\partial t} = F = -e\varepsilon$

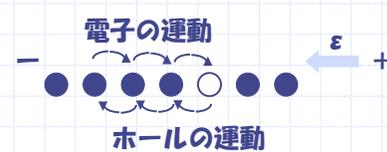
よって $\frac{1}{m^*} = \frac{1}{\hbar^2} \frac{\partial^2 E(k)}{\partial k^2}$

有効質量 effective mass = エネルギーバンドの曲率



バンドの上半分では $m^* < 0$ ホール波束は逆方向に加速される。(あたかも+電荷をもったごとく)

ほとんどつまっているバンド



$E(k) = \frac{\hbar^2 k^2}{2m^*} = -\frac{\hbar^2 k^2}{2|m^*|} < 0$

エネルギーが上の方ほど安定 (風船のようなもの)

ホール: $m^* < 0$, $E < 0$, 正電荷 をもった粒子を考えればよい。

(3) 電気伝導

電場 ε があるときの運動方程式 (古典力学!)

$$m \frac{dv}{dt} + \frac{m}{\tau} v = -e\varepsilon$$

加速度 摩擦力 電場による力

1) 力を切ったとすると $\varepsilon = 0$ だから

$$\frac{dv}{dt} = \left[\begin{array}{c} \\ \\ \end{array} \right] \Rightarrow v = \left[\begin{array}{c} \\ \\ \end{array} \right] \quad \tau : \text{緩和時間}$$

電子は平均 τ の時間内に散乱されて $v=0$ になる。

2) $\varepsilon \neq 0$ で平衡になったとすると $\frac{dv}{dt} = 0$ だから

$$v = \left[\begin{array}{c} \\ \\ \end{array} \right] \text{ よって電流密度は } j = -nev = \left[\begin{array}{c} \\ \\ \end{array} \right] \text{ だから}$$

$$\text{電気伝導度は } \sigma = \frac{j}{\varepsilon} = \left[\begin{array}{c} \\ \\ \end{array} \right]$$

$$\text{あるいは移動度 } \mu = \frac{e\tau}{m} \text{ を使って } \sigma = \left[\begin{array}{c} \\ \\ \end{array} \right]$$

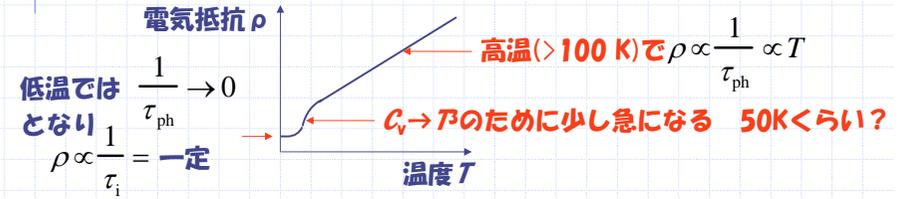
電気抵抗率 $\rho = \frac{1}{\sigma} \propto \frac{1}{\tau}$ のなかで金属では温度依存するのは τ

$$\text{実際には } \frac{1}{\tau} = \frac{1}{\tau_{ph}} + \frac{1}{\tau_i}$$

フォノンによる散乱 不純物による散乱(温度によらない)

$$\frac{1}{\tau_{ph}} = C_v \cdot T \quad \text{高温(室温以上の温度)では } \frac{1}{\tau_{ph}} \propto T$$

格子比熱: 高温では一定(Dulong-Petitの法則)



不純物による散乱による一定値(残留抵抗)

金属の抵抗は低温ほど小さくなり、極低温で一定値となる。

(4) Hall効果

x 方向に電流 j_x を流し
 z 方向に磁場 B をかけながら
 y 方向の起電力 E_y を測る。

磁場 + 電場中で電子にかかる力は

$$\vec{F} = e(\vec{v} \times \vec{B} + \vec{E})$$

ローレンツ力 電場中の力 \rightarrow 起電力

y 方向に電流は流れないから

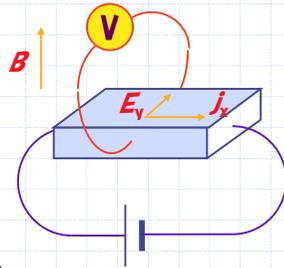
$$F_y = ev_x B - eE_y = 0 \Rightarrow E_y = \left[\begin{array}{c} \\ \\ \end{array} \right]$$

$$\text{これに } j_x = -nev_x \text{ を入れて } E_y = \left[\begin{array}{c} \\ \\ \end{array} \right] j_x B$$

R_H : Hall係数 cf. hole: 正孔

ホール係数 $R_H > 0$ ホール
 $R_H < 0$ 電子

$$R_H \rightarrow \text{キャリア濃度 } n \xrightarrow{\sigma = ne\mu} \left[\begin{array}{c} \\ \\ \end{array} \right] \mu = \frac{e\tau}{m} \text{ が求められる。}$$



(5) 熱伝導率 金属の熱伝導は主に自由電子による。

フォノン(格子振動)による熱伝導率との類推から、自由電子が運ぶ熱の熱伝導率は

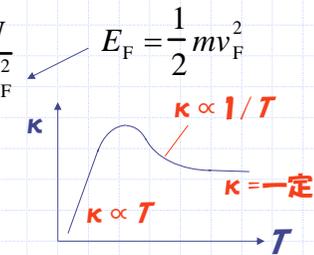
$$\kappa = \frac{1}{3} C_v v_F l_F \quad \text{平均自由行程(フェルミレベルでの)}$$

x, y, z の3方向 あるので $1/3$ 電子比熱 速度(フェルミレベルでの) $l_F = v_F \tau$

$$\kappa = \frac{1}{3} \frac{\pi^2}{3} D(E_F) k_B^2 T \cdot v_F \cdot v_F \tau$$

$$= \frac{\pi^2 N k_B^2 T \tau}{3m} \quad D(E_F) = \frac{3N}{2E_F} = \frac{3N}{mv_F^2}$$

$$\frac{\kappa}{\sigma} = \frac{\frac{\pi^2 N k_B^2 T \tau}{3m}}{\frac{Ne^2 \tau}{m}} = \left[\begin{array}{c} \\ \\ \end{array} \right] T$$



高温 $\sigma \propto 1/T \rightarrow \kappa = \left[\begin{array}{c} \\ \\ \end{array} \right]$

中間 $\sigma \propto 1/T^2 \rightarrow \kappa \propto \left[\begin{array}{c} \\ \\ \end{array} \right]$

低温 $\sigma = \text{一定} \rightarrow \kappa \propto \left[\begin{array}{c} \\ \\ \end{array} \right]$

$\frac{\kappa}{\sigma T} = L$ Lorenz数 = 一定 (Wiedeman-Franzの法則)

さまざまな物質の熱伝導率

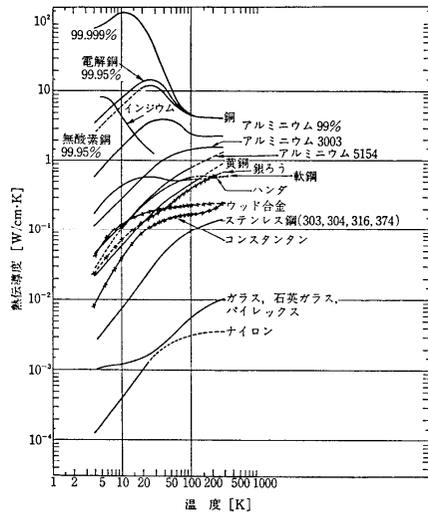


図 5.2 熱伝導率 (BOC社, "Cryogenic Data Chart" より)

(6) サンクロトロン振動 磁場中の自由電子は円運動をする。

自由電子の運動方程式

$$\frac{dp}{dt} = m \frac{dv}{dt} = -e\vec{v} \times \vec{B} \quad \text{ローレンツ力}$$

磁場中 B/z のとき

$$\frac{dv_x}{dt} = -\frac{eB}{m} v_y = -\omega_c v_y \quad \frac{dv_y}{dt} = \omega_c v_x \quad \omega_c = \frac{eB}{m}$$

電子は xy 面で円運動をする。

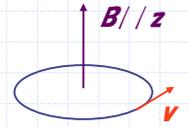
$$\begin{cases} v_x = v_0 \cos \omega_c t \\ v_y = v_0 \sin \omega_c t \end{cases}$$

これより

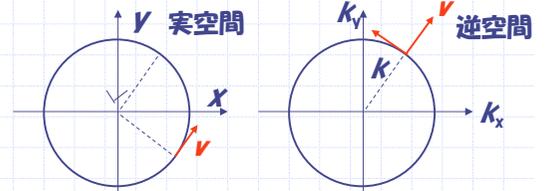
$$\begin{cases} x = \frac{v_0}{\omega_c} \sin \omega_c t \\ y = -\frac{v_0}{\omega_c} \cos \omega_c t \end{cases}$$

ちなみに

$$|r| = \frac{v_0}{\omega_c} = \frac{m}{eB} v_0 = \frac{|p|}{eB}$$



サンクロトロン振動数



逆空間より90°遅れて円運動

フェルミ面

また

$$\frac{dE(k)}{dt} = \frac{dE}{dp} \frac{dp}{dt} = -v \cdot (ev \times B) = 0$$

v と B の外積は $\perp v$ 。しかるに \perp なものの内積は 0。

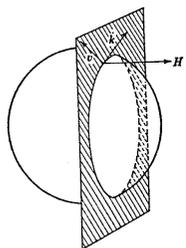
したがって電子はエネルギー一定の面(フェルミ面)上を動く(左下図)。

$\omega_c = \frac{eB}{m}$ を満たすマイクロ波を吸収する。
サイクロトロン共鳴

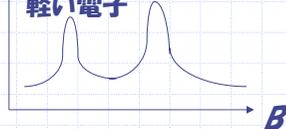
$\hbar\omega_c = \text{一定}$

マイクロ波の吸収

m^* を求める実験法



軽い電子 重い電子



(7) 量子振動

$$\omega_c = \frac{eB}{m}$$

前項のような円運動は水素の1s軌道と同じように量子化される。

(円周) = (波長) × (整数) **ボーアの量子化条件**

$$2\pi r = n\lambda = n \frac{h}{p} \quad \rightarrow \quad r \cdot p = n\hbar$$

円運動では $|r| = \frac{|p|}{eB}$ だったから $\frac{p}{eB} \cdot p = n\hbar$

運動エネルギー

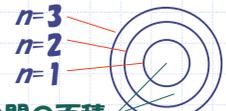
$$\begin{aligned} E &= \frac{\hbar^2}{2m} (k_x^2 + k_y^2 + k_z^2) \\ &= \frac{\hbar^2}{2m} 2 \frac{eB}{\hbar} n + \frac{\hbar^2}{2m} k_z^2 \\ &= \left[\quad \right] n + \frac{\hbar^2}{2m} k_z^2 \end{aligned}$$

$k^2 = \frac{eB}{\hbar} n$
 $S_k = \pi(k_x^2 + k_y^2)$ **円の面積** を使って

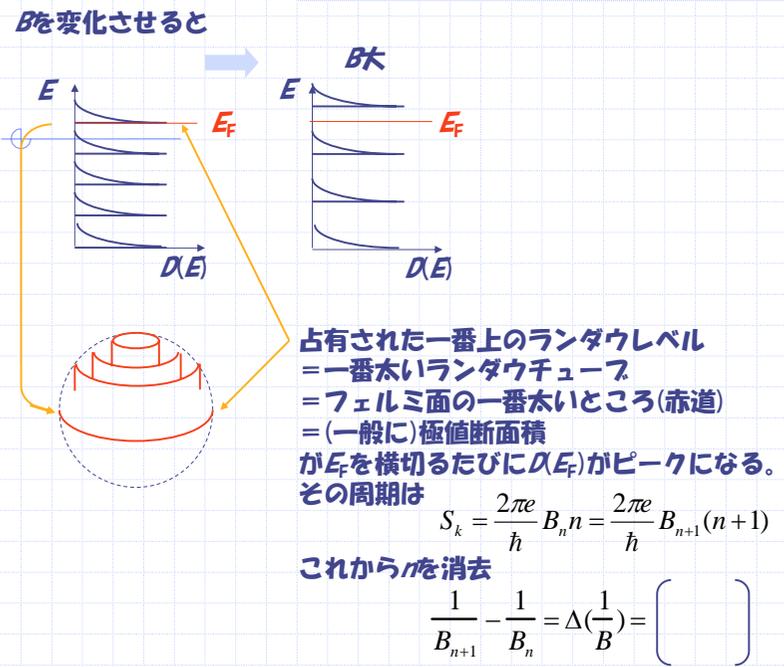
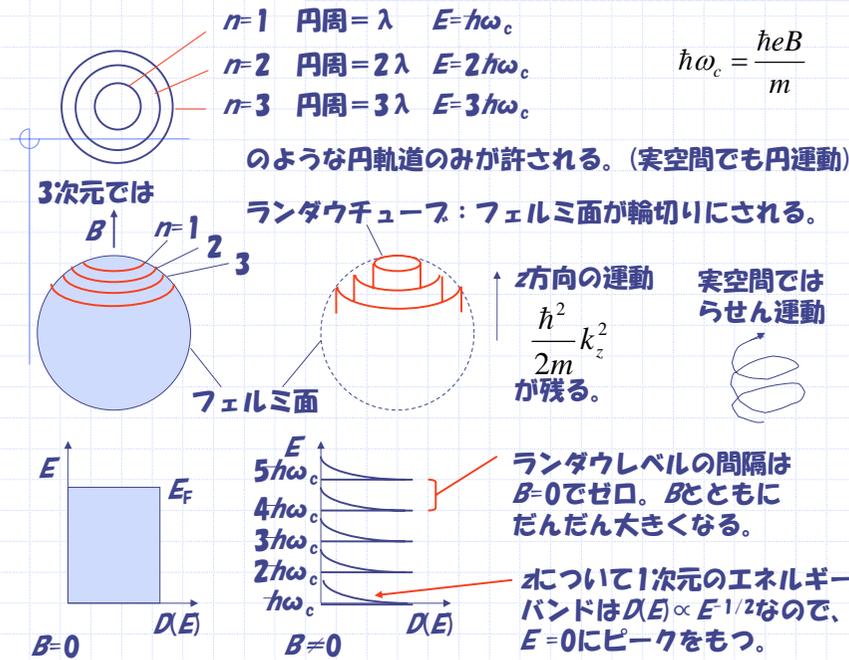
$$S_k = \frac{2\pi eB}{\hbar} n$$

$$S_k \text{ は } \frac{2\pi eB}{\hbar} \text{ の}$$

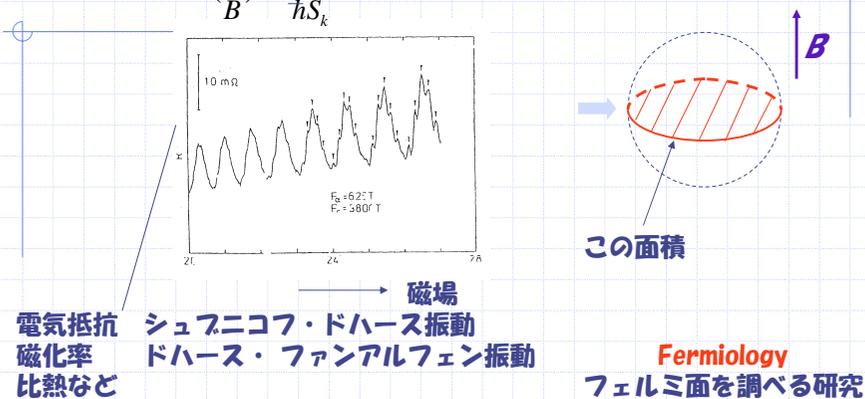
整数倍に量子化される。



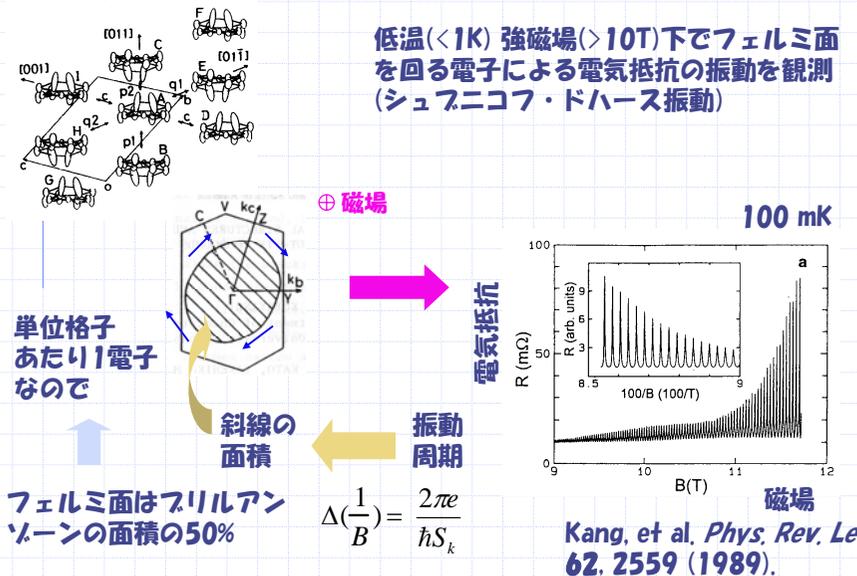
この間の面積が等しい



低温強磁場で磁場をスキャンすると金属のあらゆる性質に周期 $\Delta\left(\frac{1}{B}\right) = \frac{2\pi e}{\hbar S_k}$ の振動現象が見られる。

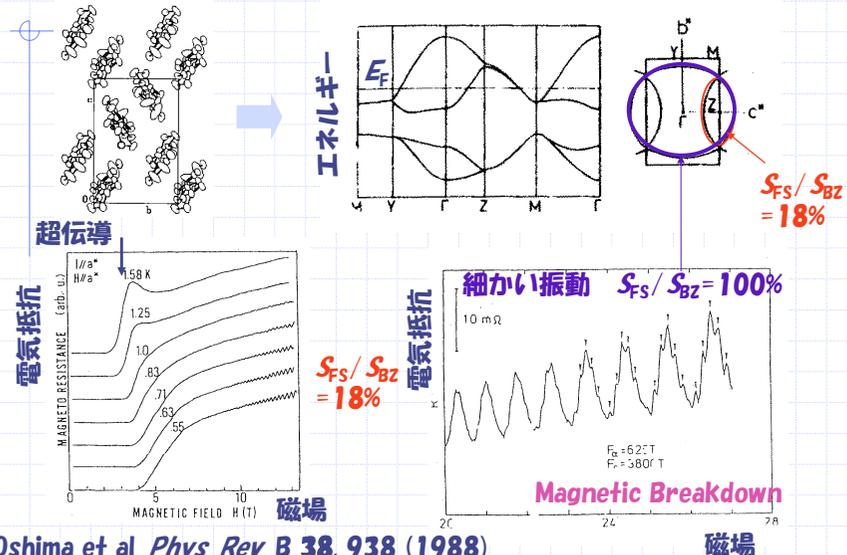


β -(BEDT-TTF) $_2I_3$ のシュフニコフ・ドハース振動



κ-(BEDT-TTF)₂Cu(NCS)₂のシュフニコフ・ドハース振動

単位格子に4分子 → 単位格子に2電子 → $S_{FS}/S_{BZ} = 100\%$

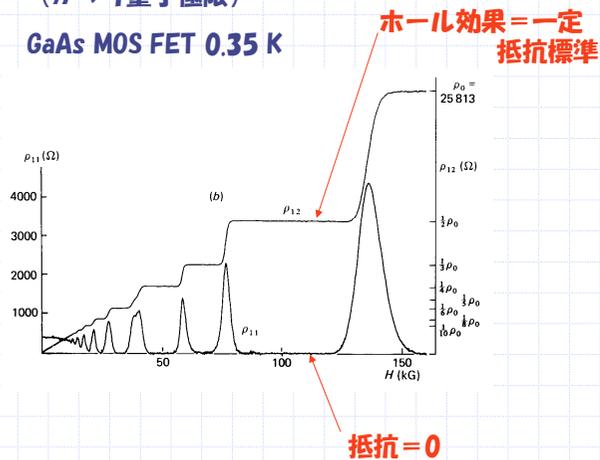


Oshima et al. *Phys. Rev. B* **38**, 938 (1988).

量子ホール効果

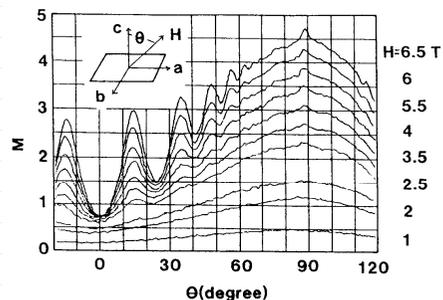
シュフニコフ・ドハースの振幅が大きくなって $R \rightarrow 0$ に達したものの、 B が大きくなってランダウレベル数個になったとき。
($n \rightarrow 1$ 量子極限)

GaAs MOS FET 0.35 K

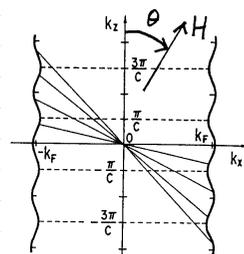


角度依存磁気抵抗振動 (AMRO)

θ - (BEDT-TTF)₂I₃



磁場を傾けながら電気抵抗を測定



梶田振動 (山地振動)

Kajita, *Solid State Commun.* **70**, 1189 (1989).
Kartsovnik, *JETP Lett.* **48**, 541 (1988).
Yamaji, *J. Phys. Soc. Jpn.* **58**, 1520 (1989).

$$\tan \theta = \frac{n \frac{\pi}{c}}{k_F}$$

$$ck_F \tan \theta = n\pi$$

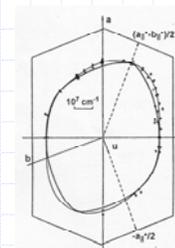
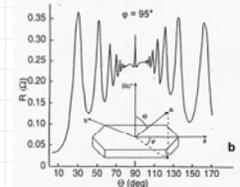
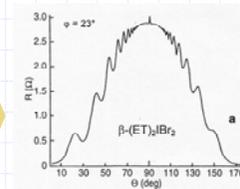
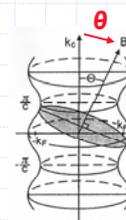
角度依存磁気抵抗振動 (AMRO)

磁場を傾けながら電気抵抗を測定

β - (BEDT-TTF)₂I₃

振動の間隔

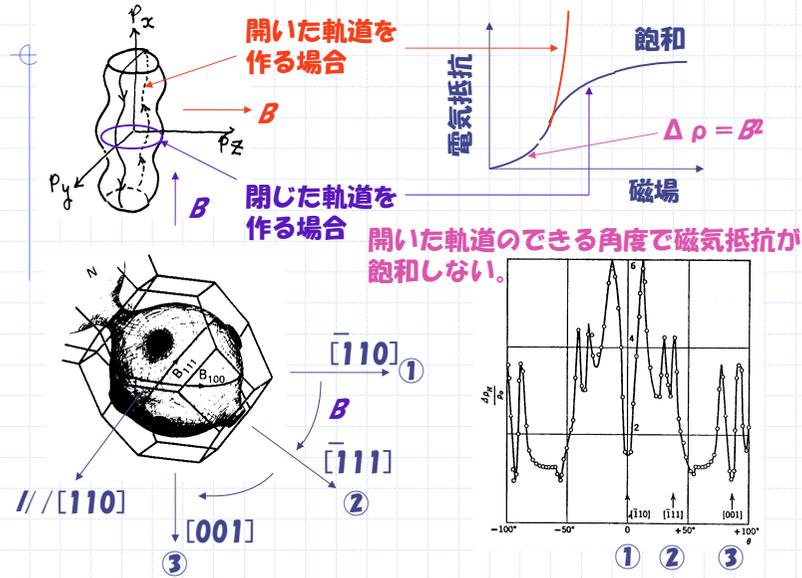
k_F の位置



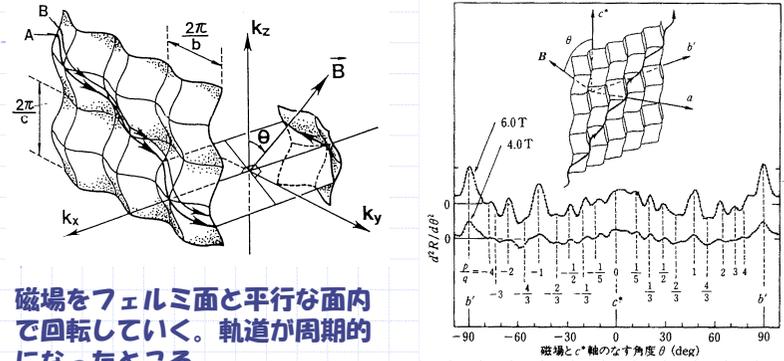
$$\tan \theta = \frac{n \frac{\pi}{c}}{k_F}$$

$$ck_F \tan \theta = n\pi$$

従来の角度依存磁気抵抗：銅のフェルミ面



開いた(一次元的)フェルミ面におけるLebed振動



磁場をフェルミ面と平行な面内で回転していく。軌道が周期的になったところ

$$\frac{c}{b} \tan \theta = \frac{p}{q} \text{ 有理数 } (p, q: \text{整数})$$

この方法では k_z のような量は求まらないが、フェルミ面の広がっている方向を正確に決定することができる。

金属の光学的性質 (プラズモン)

金属に光をあてたとき、交流電場はどう入るか。

$$D(\omega) = \epsilon_0 E(\omega) + P \quad D(\omega) = \epsilon \epsilon_0 E(\omega)$$

両式から $\alpha(\omega) = \frac{D(\omega)}{\epsilon_0 E(\omega)} = 1 + \frac{P(\omega)}{\epsilon_0 E(\omega)}$

Eによってゆすられる電子の運動方程式 $m \frac{d^2 x}{dt^2} = -eE$

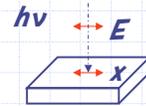
E, $x \propto e^{i\omega t}$ とすると $-m\omega^2 x = -eE \rightarrow x = \left[\dots \right]$

$P = -nex = \left[\dots \right]$ **プラズマ振動数**

これを上の式に入れて $\epsilon(\omega) = \left[\dots \right] 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}$

Maxwell方程式 $\mu_0 \frac{\partial^2 D}{\partial t^2} = \nabla^2 E$ に $E \propto e^{i(Kr - \omega t)}$ を入れると

$\mu_0 \epsilon_0 \epsilon \omega^2 = K^2 \rightarrow \omega^2 - \omega_p^2 = \alpha K^2$
 $1/\alpha$



$$\omega^2 - \omega_p^2 = \alpha K^2$$

$$\epsilon(\omega) = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}$$

$$\omega < \omega_p \rightarrow K \text{ 虚数}$$

金属中で $E \propto e^{-Kr}$ と減衰
 光はなかに入らないで全反射：金属光沢
 ω_p 通常の金属：近紫外 有機導体：近赤外

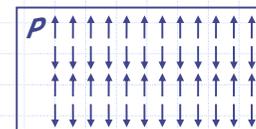
$$\omega > \omega_p \rightarrow K \text{ 実数}$$

$E \propto e^{-iKr}$ 金属も紫外線には透明

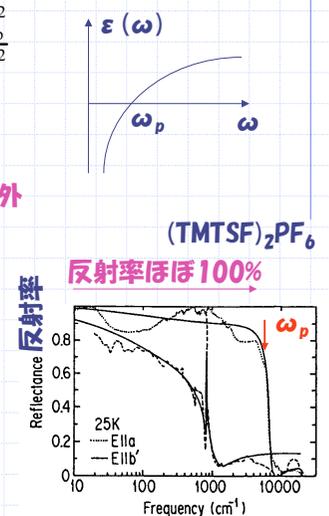
$$\omega = \omega_p \rightarrow D = 0 \rightarrow E = -\frac{1}{\epsilon_0} P = \frac{nex}{\epsilon_0}$$

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = -\frac{ne^2}{\epsilon_0} x \rightarrow \frac{d^2 x}{dt^2} + \omega_p^2 x = 0$$

電子は ω_p の固有振動をする：**プラズマ振動**



縦波の疎密波



(TMTSF)₂PF₆