

第 15 回 熱応力・熱衝撃破壊

東京工業大学
材料工学専攻
准教授 安田公一

1. はじめに

今回は、熱応力と熱衝撃破壊について説明する。熱応力については、熱弾性理論の概要を説明する。また、熱衝撃破壊については、十分解明されていないのが現状なので、ここでは、現象論の範疇で説明する。

2. 定常熱応力

無応力状態の長さ l の棒状試験片があり、その熱膨張係数を α 、ヤング率を E とする。試験片の温度が T_0 から T まで変化し、定常状態になった後の試験片の熱膨張ひずみ $\varepsilon_{\text{thermal}}$ は、次式で与えられる。

$$\varepsilon_{\text{thermal}} = \alpha(T - T_0) \quad (1)$$

試験片に外部からの拘束がなければ、この温度変化の結果、試験片が自由に膨張あるいは収縮するということになり、その結果、温度 T においても無応力状態になる。

しかし、試験片に外部からの拘束があると、熱応力が発生する。例えば、試験片の両端が外部から拘束され、変位できないようになっていると、(1)式の熱膨張ひずみを打ち消すような内部応力 σ_{thermal} （これが熱応力のこと）が発生し、次式で与えられる。

$$\sigma_{\text{thermal}} = -E\varepsilon_{\text{thermal}} = -E\alpha(T - T_0) \quad (2)$$

このような熱応力を定常熱応力という。 $T > T_0$ の場合は試験片に圧縮の熱応力($\sigma_{\text{thermal}} < 0$)となり、 $T < T_0$ の場合は試験片に圧縮の熱応力($\sigma_{\text{thermal}} > 0$)となる。

3. 非定常熱応力

急速な温度変化を与えて、試験片内に温度分布ができる場合は、非定常熱応力が発生する。すなわち、過渡的に温度分布が時々刻々変化することに対応して、試験片内の応力分布も変化する。非定常熱応力を計算するには、熱弾性論に基づいて、次式の方程式系（微小変形理論を仮定する）を連成して解くことになる。ただし、記述の簡便のため、無応力状態の温度を 0 とし、そこからの温度変化を T で表すことにする。すなわち、ここでの T は、通常、 $\Delta T = T - T_0$ と表されているものに相当する。

$$\text{熱弾性構成方程式} \quad \sigma_{ij} = C_{ijkl} \varepsilon_{kl} - \beta_{ij} T \quad (3)$$

$$\text{質量保存則} \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho v_i}{\partial x_i} = 0 \quad (4)$$

$$\text{運動量保存則} \quad \rho \dot{v}_i = \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + X_i \quad (5)$$

$$\text{エネルギー保存則} \quad \dot{U} = T \dot{S} + \frac{1}{\rho} \sigma_{ij} V_{ij} \quad (6)$$

$$\text{エントロピー変化率} \quad \rho \dot{S} = -\frac{1}{T} \frac{\partial h_i}{\partial x_i} = -\frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{h_i}{T} \right) - \frac{h_i}{T^2} \frac{\partial T}{\partial x_i} \quad (7)$$

$$\text{熱伝導} \quad h_i = -k_{ij} \frac{\partial T}{\partial x_j} \quad (8)$$

$$\text{比熱の定義} \quad -\frac{\partial h_i}{\partial x_i} = \rho C_V \dot{T} \quad (\text{at } \dot{\varepsilon}_{ij} = 0) \quad (9)$$

ここで、 σ_{ij} は応力テンソル、 C_{ijkl} は弾性スティフネステンソル、 ε_{ij} はひずみテンソル、 β_{ij} は熱弾性係数、 ρ は質量密度、 v_i は速度ベクトル（変位ベクトルの時間微分）、 X_i は単位体積当たりの物体力、 U は単位質量当たりの内部エネルギー、 S は単位質量当たりのエントロピー、 V_{ij} は変形速度テンソル（速度勾配の対称成分）、 T は温度、 h_i は熱流速ベクトル、 k_{ij} は熱伝導率テンソル、 C_V は定積比熱である。また、変数の上のドットは、

$$(\dot{}) = \frac{D()}{Dt} = \frac{\partial()}{\partial t} + v_i \frac{\partial()}{\partial x_i} \quad (10)$$

という物質導関数を表すが、微小速度（微小変形）を仮定しているので、

$$(\dot{}) = \frac{\partial()}{\partial t} \quad (11)$$

と見なしても良い。そこで、以下では、変数の上のドットは時間による偏微分であるとする。また、(7)式では試験片内部に熱源を含まない場合を仮定している。以上の7つの方程式を連立して、試験片の初期条件・境界条件にあう解を導出することになるが、もう少し使いやすい形に変形することにする。

まず、単位質量当たりのヘルムホルツの自由エネルギー $F(=U-TS)$ を導入すると、熱力学関係式より、次式が得られる。

$$\rho \left(\frac{\partial F}{\partial \varepsilon_{ij}} \right)_T = \sigma_{ij}, \quad \left(\frac{\partial F}{\partial T} \right)_{\sigma_{ij}} = -S \quad (12)$$

学部 3 年前期の連続体力学の講義では、単位体積当たりの内部エネルギーやエントロピーでエネルギー方程式を導出していて、それは、

$$dU = TdS + \sigma_{ij}d\varepsilon_{ij} \quad (13)$$

となったが、ここで議論している単位質量当たりの内部エネルギーやエントロピーでエネルギー方程式を導出すると、

$$dU = TdS + \frac{1}{\rho} \sigma_{ij}d\varepsilon_{ij} \quad (14)$$

となることから、(12)式の第 1 式に質量密度 ρ が含まれてくることになる。この違いは、単位体積当たりの内部エネルギーから物体の内部エネルギーを計算すると、

$$U_{total} = \int U dV \quad (15)$$

という体積積分になるが、単位質量当たりの内部エネルギーから物体の内部エネルギーを計算すると、

$$U_{total} = \int \rho U dV \quad (16)$$

となることによるものである。このことは、 ρ の次元は $[\text{kg}/\text{m}^3]$ 、 U の次元は $[\text{J}/\text{kg}]$ なので、 ρU の次元は $[\text{J}/\text{m}^3]$ となることからわかる。

さて、本題に戻って、(12)式の第 2 式を使って、(7)式の S を書き換えると、

$$\begin{aligned} -\frac{1}{T} \frac{\partial h_i}{\partial x_i} &= \rho \dot{S} \\ &= \rho \frac{\partial S}{\partial \varepsilon_{ij}} \dot{\varepsilon}_{ij} + \rho \frac{\partial S}{\partial T} \dot{T} \\ &= -\rho \frac{\partial^2 F}{\partial \varepsilon_{ij} \partial T} \dot{\varepsilon}_{ij} - \rho \frac{\partial^2 F}{\partial T^2} \dot{T} \end{aligned} \quad (17)$$

温度 T を掛けて、 $\varepsilon_{ij} = 0$ と置いて、(9)式を比較すれば、

$$C_V = -T \frac{\partial^2 F}{\partial T^2} \quad (18)$$

となる。また、(12)式の第1式と(3)式より、

$$\rho \frac{\partial^2 F}{\partial \varepsilon_{ij} \partial T} = \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial T} = -\beta_{ij} \quad (19)$$

(18)式と(19)式を(17)式に代入して、整理すれば、

$$-\frac{\partial h_i}{\partial x_i} = \rho C_V \dot{T} + T \beta_{ij} \dot{\varepsilon}_{ij} \quad (20)$$

(8)式を(20)式に代入すれば、

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \left(k_{ij} \frac{\partial T}{\partial x_j} \right) = \rho C_V \dot{T} + T \beta_{ij} \dot{\varepsilon}_{ij} \quad (21)$$

となる。これは、通常の熱伝導方程式に、連成項として右辺第2項が付加された形になっていて、ひずみの時間変化が温度変化をもたらすことを意味している。したがって、温度分布によって熱膨張ひずみが決まるというこれまでの議論に加えて、ひずみの変化が温度変化をもたらすため、温度場とひずみ場の連成問題と呼ばれている。

以上のことから、(3)式、(4)式、(5)式、(21)式を連立して解けばよいことになる。ただし、試験片が等方体であれば、(3)式は、次式のように簡単になる。

$$\sigma_{ij} = \lambda e \delta_{ij} + 2G \varepsilon_{ij} - \beta \delta_{ij} T \quad (22)$$

ここで、 λ と G はラメの定数、 e は体積ひずみ($=\varepsilon_{ii}$)、 β は熱弾性係数で、次式で表される。

$$\beta = \frac{\alpha E}{1-2\nu} = (3\lambda + 2G)\alpha \quad (23)$$

ここで、 E はヤング率、 ν はポアソン比、 α は熱膨張係数である。

4. 非連成準静的理論

一般に、上述の連成問題を解析的に解くことは難しいが、幸いにも、工学における多くの熱応力問題は準静的な変化と見なして良い場合が多く、(4)式の左辺第2項（速度ベクトル v_i を含んでいる項）、(5)式の左辺（速度ベクトル v_i を含んでいる慣性項）、(6)式の右辺第2項（変位速度テンソル V_{ij} を含んでいる項）、(21)式の右辺第2項（熱伝導方程式におけるひずみ速度項）などの連成項は無視してもよい。このような考え方を、非連成準静的理論と呼び、熱伝導方程式を解いて温度分布を求め、その結果を使って熱弾性論から応力分布を決めるということができる。

具体的には、まず、(21)式の右辺第2項を無視して、デカルト座標系(x,y,z)で書き出すと、

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(k \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(k \frac{\partial T}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(k \frac{\partial T}{\partial z} \right) = \rho C_v \frac{\partial T}{\partial t} \quad (24)$$

となるが、熱伝導率 k が定数（座標の関数でなければ）であれば、

$$k \left[\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right] = \rho C_v \frac{\partial T}{\partial t} \quad (25)$$

となる。円柱座標系(r, θ , z)の場合は、

$$k \left[\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 T}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right] = \rho C_v \frac{\partial T}{\partial t} \quad (26)$$

となる。球座標(r, θ , ϕ)の場合は、

$$k \left[\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial T}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 T}{\partial \phi^2} \right] = \rho C_v \frac{\partial T}{\partial t} \quad (27)$$

となる。これらの熱伝導方程式を適当な初期条件・境界条件で解いて、まず、温度分布の時間変化を求める。

次に、構成方程式、平衡方程式、ひずみテンソルと変位勾配の関係式から、

$$\sigma_{ij} = \lambda e \delta_{ij} + 2G \varepsilon_{ij} - \beta \delta_{ij} T \quad (28)$$

$$\sigma_{ij,j} + X_i = 0 \quad (29)$$

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}) \quad (30)$$

応力 σ_{ij} とひずみ ε_{kl} を消去して、変位だけの方程式にすると、次式が得られる。

$$Gu_{i,kk} + (\lambda + G)u_{k,ki} + X_i - \beta T_{,i} = 0 \quad (31)$$

この式は、変位 u_i を座標で 2 階微分した微分方程式であり、左辺第 4 項の温度の座標微分 $T_{,i}$ は、(25)~(27)式の熱伝導方程式を解いて、温度 T が時間 t と座標 x, y, z の関数として既に表されているから計算することができる。したがって、(31)式を 2 階積分すれば、変位 u_i に関する積分方程式が得られるので、それを、適当な初期条件・境界条件の下で解けば、変位場 u_i が求められる。そして、変位場 u_i が求められれば、その座標微分の対称成分を作るとひずみ場 ε_{ij} になるので、それを(28)式に代入すれば、応力場 σ_{ij} も完全に決めることができる。これが、非連成準静的理論の一般的な解法の流れである。

5. Duhamel の相似則

(31) 式は、一般化ナビアの方程式と呼ばれ、通常のナビアの方程式 ($Gu_{i,kk} + (\lambda + G)u_{k,ki} + X_i = 0$) における物体力 X_i を $X_i - \beta T_{,i}$ に置き換えたものになっている。この式は、表面上の変位で境界条件（例えば、 $u_i = u_i(x_j)$ など）が与えられる場合に便利な形になっている。一方、表面（法線ベクトル ν_i ）上の面力 $f(x_i)$ で境界条件（例えば、 $\sigma_{ij} \nu_j = f(x_i)$ ）が与えられる場合、(28)式より、この境界条件は

$$\nu_j [\lambda u_{\mu,\mu} + Gu_{i,j} + Gu_{j,i} - \beta \delta_{ij} T] = f(x_i) \quad (32)$$

と書ける。これは、実際には表面力 f_i だけが与えられているが、これを $f_i + \beta \delta_{ij} T \nu_j$

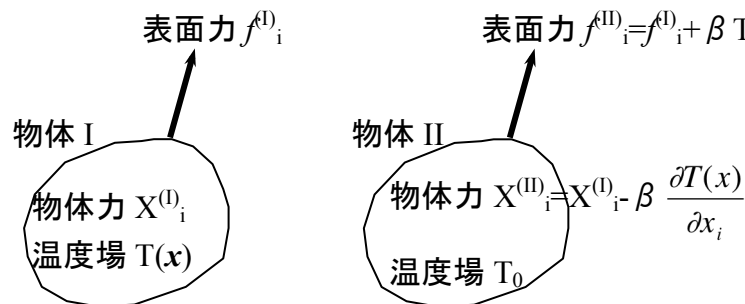


図 1 Duhamel-Neumann の類似則

に置き換えたものと等価となっていることを表している。

このことを一般化すると、Duhamel の相似則という形にまとめることができる。すなわち、図 1 に示すように、形状が同じで、変位境界条件および外力境界条件が同じ 2 つの物体があり、物体 I はある温度分布 $T(x,y,z)$ を有し、物体 II は一定温度 0 であったとすると、これらの応力分布は次式で表される。

$$u^{(I)} = u^{(II)} \quad (31)$$

$$\sigma_{ij}^{(I)} = \sigma_{ij}^{(II)} - \beta T(x) \delta_{ij} \quad (32)$$

これより、温度分布がある物体 I の応力分布・変位分布を求めるには、温度分布がないと見なし、その影響を物体力と表面力として考慮した物体 II の弾性解析を行えば、その結果の変位場 II が物体 I の変位場 I になり、また、応力場 II に(32)式で付加項を足したものが物体 I の応力場になる。この相似則を使えば、これまで蓄積された 2 次元弾性論・3 次元弾性論の結果をうまく利用して、熱応力問題を解くことができる。

以上、熱弾性論の基礎を説明してきたが、実際には、単純な形状や簡単な境界条件の場合でないと、解析的解くことが難しく、有限要素法で熱伝導解析を行って温度分布を求め、そこから、熱応力分布を計算することの方が多くなってきている。

5. 熱衝撃破壊

試験片に急熱・急冷試験によって非定常熱応力を与え、試験片の破壊応力よりも熱応力の最大値が大きくなると、試験片にマイクロクラックの発生およびその進展、あるいはそれが巨視的き裂にまで至ることがある。これらの現象を総称して熱衝撃破壊という。

熱衝撃に対する抵抗性には、3 つの異なる考え方がある。それは、熱衝撃破壊抵抗、熱衝撃損傷抵抗、熱疲労破壊抵抗である。熱衝撃破壊抵抗は、急熱・急冷試験を行った後、曲げ試験を行って試験片の破壊応力が低下し始める温度差の大小で議論され、主に、エンジニアリングセラミックスの強度劣化が議論される。熱衝撃損傷抵抗性は、同じ温度差を与えた時に発生するき裂がどの程度進展するかに着目し、主に、耐火物などの崩壊・脱落が議論される。これらは、いずれも、 $\sigma_{\text{thermal}} > \sigma_f$ あるいは、 $K_I > K_{IC}$ で起こる現象であるが、SCG の影響も一部含む場合もある。

熱疲労破壊抵抗は、1 回の熱衝撃で発生する熱応力は $\sigma_{\text{thermal}} < \sigma_f$ あるいは、 $K_I < K_{IC}$ であっても、定常熱応力下あるいは熱サイクルによって、徐々にき裂が進展する場合に用いられる。

これらの熱衝撃抵抗性については、半定量的な古典的パラメーターと言うものが存在する。今では、ほとんど使われなくなったが、材料間の比較をする場合などには有用なこともあるので、簡単に紹介しておく。

(1) 熱衝撃破壊抵抗 R, R'

温度 T_0 、半径 b の無応力状態の無限円柱を、温度 T の冷却槽に入れ、熱伝達係数 h で冷却する場合を考える。ここで、熱伝達係数 h とは、図2に示すように、固体と流体の境界面を通して、熱の伝達が起こる場合、境界面の単位面積、単位時間当たり境界面を通る熱流速ベクトル J と、境界面での固体の温度 $T_{\text{interface}}$ と流体の温度 T_L との差 θ ($=T_{\text{interface}}-T_L$)の間には、次式の関係が成り立つ。

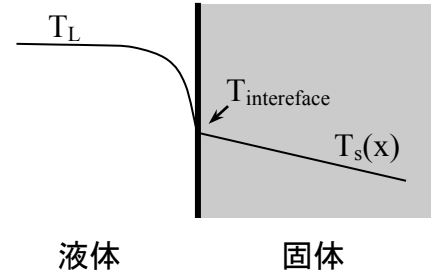


図2 熱伝達係数の定義

$$J = -h\theta \quad (33)$$

なお、熱伝導率 k は、固体中の熱流速ベクトル J が固体中の温度勾配に比例するので、その比例係数である。また、固体間の接触の場合は、接触界面に温度差が生じるので、接触熱抵抗という比例係数を使って表す。

話を基に戻すと、そういう冷却をする時に発生する最大熱応力 $\sigma_{\max}$ は、次式で近似できることが知られている。

$$\sigma_{\max} = \frac{E\alpha\Delta T}{(1-\nu)} \cdot \frac{1}{1.451\left(1 + \frac{3.41}{\beta}\right)} \quad (34)$$

ここで、 E はヤング率、 α は熱膨張係数、 ΔT は無限円柱と冷却槽との温度差、 ν はポアソン比である。 β はビオ係数であり、次式で定義される。

$$\beta = \frac{bh}{k} \quad (35)$$

ここで、 k は熱伝導率である。ビオ係数が大きいと、急冷を意味し、小さいと徐冷を意味する。本章では、熱弾性係数 (23) 式にも β を使っているので、混同し内容に注意すること。

(34)式を ΔT について解くと、

$$\Delta T = \frac{1.451\sigma_{\max}(1-\nu)}{\alpha E} \left(1 + \frac{3.41}{\beta}\right) \quad (36)$$

となるが、熱応力の最大値 $\sigma_{\max}$ が試料の破壊応力 σ_f に達した時が、熱衝撃破壊の臨界温度差 ΔT_c になるので、

$$\Delta T_c = \frac{1.451\sigma_f(1-\nu)}{\alpha E} \left(1 + \frac{3.41}{\beta} \right) \quad (37)$$

もし、急冷した場合は β が大きな値になるので、(37)式は、

$$\Delta T_c = \frac{1.451\sigma_f(1-\nu)}{\alpha E} \quad (38)$$

と近似できる。(38)式から定数項を除き、材料特性だけを取り上げて、新たに、熱衝撃破壊抵抗 R を次式のように定義する。

$$R = \frac{\sigma_f(1-\nu)}{\alpha E} \quad (39)$$

一方、徐冷した場合は β が小さな値になるので、(37)式は、

$$\begin{aligned} \Delta T_c &= \frac{1.451 \cdot 3.41 \sigma_f(1-\nu)}{\alpha E \beta} \\ &= \frac{1.451 \cdot 3.41 \sigma_f(1-\nu)k}{\alpha E b h} \end{aligned} \quad (40)$$

と近似できる。やはり、(40)式から定数項を除き、また、試験片の代表寸法である b と、熱伝達係数 h （熱伝達係数は、試験片の形状、冷却媒の対流、温度の影響を受けて変化するため）を除いて、材料特性だけを取り上げて、新たに、熱衝撃破壊抵抗 R' を次式のように定義する。

$$R' = \frac{\sigma_f(1-\nu)k}{\alpha E} = Rk \quad (41)$$

なお、 R'' については、表面の温度変化速度（ $=dT/dt$ ）が一定の場合に定義され、 $R''=R'/\rho c$ となる。ここで、 ρ は密度、 c は比熱である。

（２）熱衝撃損傷抵抗 R'''

ここでは、熱衝撃によってき裂が進展した場合、どのくらいの長さにき裂が伸びるのかについて考える。半径 b の球を急熱し、球の中心が破壊応力に達した場合、その

時の球全体の弾性ひずみエネルギー W は、半径方向の温度分布を放物線で近似すると、次式で表される。

$$W = \frac{4\pi b^2 \sigma_f^2 (1-\nu)}{7E} \quad (42)$$

この弾性ひずみエネルギーが準静的に N 本のき裂発生に消費されたとすると、き裂 1 個当たりのき裂面積 A は、次式で与えられる。

$$A = \frac{2\pi b^3 \sigma_f^2 (1-\nu)}{7EN\Gamma} \quad (43)$$

ここで、 Γ は試験片の破壊エネルギーである。き裂面積 A が小さい方が熱衝撃損傷抵抗が高いので、 A の逆数を取って、材料特性のみを取り出すと、熱衝撃損傷抵抗 R''' を次式のように定義できる。

$$R''' = \frac{E\Gamma}{\sigma_f^2 (1-\nu)} \quad (44)$$

なお、 R''' は、破壊エネルギーが材料間でほとんど変わらないという前提で使う熱衝撃損傷抵抗で、 R''' を破壊エネルギー Γ で割った値になっている。

(3) 熱疲労破壊抵抗

熱疲労は、 $K_I < K_{IC}$ であっても、SCG によってき裂が成長することによって起こる。この場合のき裂進展則は、温度変化も考慮して、

$$\frac{da}{dt} = AK_I^n \exp\left(-\frac{Q}{RT}\right) \quad (45)$$

で表し、静熱疲労寿命 t_s は、このき裂進展則を初期応力拡大係数 K_{II} から臨界応力拡大係数 K_{IC} まで積分することにより、

$$t_s = \frac{2(1-\nu)^2 \exp\left(\frac{Q}{RT}\right)}{C_1 (\alpha E \Delta T)^2 Y^2 A (n-2) K_{II}^{n-2}} \quad (46)$$

ここで、 C_1 は定数、 Y は応力拡大係数の定義式に含まれる形状係数である。この式の材料特性だけ取り出すことにより、温度差によって熱的境界条件が与えられる場合の

熱疲労破壊抵抗 R_f は、次式のように定義される。

$$R_f = \frac{(1-\nu)^2 \exp\left(\frac{Q}{RT}\right)}{\alpha^2 E^2 (n-2) A} \quad (47)$$

また、熱流速で熱的境界条件が与えられる場合の熱疲労破壊抵抗 R'_f は、次式の用に定義される。

$$R'_f = \frac{(1-\nu)^2 k^2 \exp\left(\frac{Q}{RT}\right)}{\alpha^2 E^2 (n-2) A} = R_f k^2 \quad (48)$$

ここで、 k は熱伝導率である。一方、熱サイクル（繰り返し熱衝撃）を与えた場合の繰り返し熱疲労寿命回数 N_f も、静熱疲労寿命 t_s と同様な計算を行って類似のパラメータが定義されているが、個々に述べた熱疲労破壊抵抗はほとんど使われたことがない。

6. Hasselman の熱応力破壊の統一理論

前節で述べた各種パラメータを統一的に説明できる理論を Hasselman が提案しているので、それについて簡単に説明する。仮定としては、

- ①試験片は温度 T_1 から T_2 に均一に冷却される(温度差 $\Delta T = T_1 - T_2$)。
- ②試験片は完全に拘束されている。
- ③試験片内部には、均一な 3 次元熱応力 $\sigma_{thermal} = \frac{E\alpha\Delta T}{(1-2\nu)}$ が生じている。
- ④試験片中には、 N 個の円盤状き裂（半径 ℓ ）が分布している。
- ⑤ N 個のき裂は相互干渉しない。

を想定する。この系の全エネルギーは、熱応力による弾性ひずみエネルギーとき裂表面生成による表面エネルギーの和となるので、次式で表される。

$$W = \frac{3(\alpha\Delta T)^2 E_0}{2(1-2\nu)} \left\{ 1 + \frac{16(1-\nu^2)N\ell^3}{9(1-2\nu)} \right\}^{-1} + 2\pi N\ell^2 \Gamma \quad (49)$$

ここで、 E_0 はき裂を含まない時のヤング率である。この系でき裂が進展する条件は、 $\frac{dW}{da} = 0$ で与えられ、この時の温度差を ΔT_c とすると、次式が得られる。

$$\Delta T_c = \left\{ \frac{\pi \Gamma (1-2\nu)^2}{2 E_0 \alpha^2 (1-\nu^2)} \right\}^{\frac{1}{2}} \left\{ 1 + \frac{16(1-\nu^2) N \ell^3}{9(1-2\nu)} \right\} \ell^{-\frac{1}{2}} \quad (50)$$

この ΔT_c とき裂半径 ℓ の関係を図 3 に示す。この図は、ポアソン比 ν を 0.25 とし、縦軸に臨界温度差、横軸にき裂長さを取った図となっている。実線よりも上の領域は不安定き裂進展領域、下の領域は停止領域である。き裂数 N を与えると、不安定領域の右側の境界線が変化することがわかる。初期き裂長さ ℓ_0 を 10^{-2}cm とし、熱衝撃の温度差を徐々に上げていくと、点 A に達した段階で、き裂が不安定進展を始め、臨界温度差 ΔT_c になることがわかる。しかし、き裂が進展して、点 B に達するとき裂の停止領域に入るので、そこで、き裂が停止することがわかる。しかし、実際にはき裂が動的に進展しているので（準静的にではなく、運動エネルギーを持って進展しているので）、点 B ではき裂が止まらずに、点線で示した動的き裂停止条件を示す点 C まで進展することになる。このような挙動は、実線で示した境界線の最小値に対応するき裂長さよりも小さい場合に起こる。そこで、初期き裂長さ ℓ_0 が十分小さいと仮定すると、(50)式の 2 番目の中括弧の第 2 項にある ℓ^3 の寄与は無視できるので、臨界温度差 ΔT_c は次式で表される。

$$\Delta T_c = \left\{ \frac{\pi \Gamma (1-2\nu)^2}{2 E_0 \alpha^2 (1-\nu^2)} \right\}^{\frac{1}{2}} \ell^{-\frac{1}{2}} \quad (51)$$

一方、半径 ℓ の円盤状き裂を含む試験片の破壊応力は、次式で表される。

$$\sigma_f = \left\{ \frac{E \Gamma}{2(1-\nu^2)\ell} \right\}^{\frac{1}{2}} \quad (52)$$

そこで、(52)式を使って、(51)式を書き直すと、

$$\Delta T_c = \frac{\sqrt{\pi} \sigma_f (1-2\nu)}{E_0 \alpha} \quad (53)$$

となり、定数項や ν の係数を無視すれば、熱衝撃抵抗 R ((39)式)と同じ物理的意味を表していることがわかる。次に、き裂の停止長さを ℓ_f とすれば、 $W(\ell_0) = W(\ell_f)$ が満足するような ℓ_f となるはずなので、(49)式を代入して、計算すると、き裂の停止長さ ℓ_f は次式で与えられる。

$$\ell_f = \left\{ \frac{3(1-2\nu)\sigma_f^2}{4\pi N\Gamma E_0} \right\}^{\frac{1}{2}} \quad (54)$$

また、1 本当たりのき裂面積 A は次式で与えられる。

$$A = \frac{3(1-2\nu)\sigma_f^2}{4N\Gamma E_0} \quad (55)$$

熱衝撃損傷抵抗は、き裂面積 A が小さい方が抵抗性があるということになるので、(55) 式の逆数を取って、材料特性のみ取り出すと、

$$\frac{\Gamma E_0}{\sigma_f^2(1-2\nu)} \quad (56)$$

となり、 ν の係数を除くと、熱衝撃損傷抵抗 R''' (44) 式と同じ式が得られている。このように、Hasselman の理論では、熱衝撃に関するパラメーターを理論の枠組みの中で、統一的に記述できることがわかる。

さて、話を図 3 に戻して、臨界温度差 ΔT_c で熱衝撃を与えると、最終的に点 C でき裂が停止してき裂長さが ℓ_f になるのであるが、この臨界温度差よりも大きな温度差を与えた場合、点 C' に相当する温度差 $\Delta T_c'$ に至るまでは、き裂は停止したままであるが、点 C' に到達し、さらにそれよりも温度差が大きくなると、不安定領域の境界線（実線）に沿って、温度差に相当する分、き裂が準静的に進むことになる。

このような準静的進展は、実線で示した境界線の最小値に対応するき裂長さよりも初期き裂長さが大きい場合に起こる。すなわち、初期き裂長さが ℓ_f で表される長さであった場合、点 C' で表される $\Delta T_c'$ の温度差まではき裂は進展しないが、 $\Delta T_c'$ の温度差以上の温度になると、その温度差に対応する境界線上の点まで、き裂が準静的に進むことになる。このようなことは、初期き裂が長さが十分大きい場合に現れ、その場合の臨界温度差は、(50) 式の 2 番目の中括弧の第 2 項の寄与が第 1 項よりも相対的に大きくなるので、

$$\Delta T_c = \left\{ \frac{\pi\Gamma(1-2\nu)^2}{2E_0\alpha^2(1-\nu^2)} \right\}^{\frac{1}{2}} \left\{ \frac{16(1-\nu^2)N\ell^3}{9(1-2\nu)} \right\} \ell^{-\frac{1}{2}} \quad (57)$$

隣、これが境界線の右側部分を表していることになる。

以上のようなき裂進展挙動になるので、これと対応して、熱衝撃試験後の破壊応力の変化は、次のように説明される。図 4 には、初期き裂長さが小さい場合(a)と大きい

場合(b)について、熱衝撃の温度差 ΔT に対するき裂長さと破壊応力の変化を示した。

まず、き裂長さが小さい場合は、図 3 と対応させると、点 A で表される温度差が ΔT_c になるまではき裂は初期き裂長さのままであるので、破壊応力に変化はない。しかし、温度差が ΔT_c に達すると、き裂長さが点 C で表される l_f まで進展するので、破壊応力は一挙に減少する。その後、点 C から点 C'の温度差ではき裂が停止しているので、破壊応力の変化はなく、点 C'に達してからは、温度差に応じてき裂が準静的に進展するため、破壊応力が徐々に減少するという変化を示す。このような挙動は、高強度材料の熱衝撃試験の結果として良く得られる。

一方、き裂長さが長い場合は、図 3 と対応させると、初期き裂長さが l_f であれば、点 C'に相当する温度差 $\Delta T_{c'}$ になるまでは、き裂は進展しないので、破壊応力に変化はなく、しかし、温度差が $\Delta T_{c'}$ を越えると、温度差に応じてき裂が準静的に進展するため、破壊応力が徐々に減少するという変化を示す。このような挙動は、耐火レンガの熱衝撃試験の結果として良く得られる。