第 1 回　弾性

材料工学専攻
准教授　安田公一

１．はじめに

　今回は，固体の弾性について講義する．フックの法則については，既に，小学生の頃に学んでいると思うが，それを結晶に適用できるように一般化する．

２．弾性変形

　まずは，ウォーミングアップということで，等方体の線型弾性変形の表現について復習する．固体に垂直応力σが負荷した場合，応力の値が大きくない範囲では，線型弾性変形を示す．ヤング率を E，垂直ひずみをεとすると，

$$\sigma = E\varepsilon \qquad (1)$$

となり，せん断応力τが負荷した場合は，剛性率を G，せん断ひずみ（工学ひずみ）をγとすると，

$$\tau = G\gamma \qquad (2)$$

となる．等方体では，ヤング率 E，剛性率 G の他に，ポアソン比υ，体積弾性率 B と言う弾性率を用いる場合もある．後に議論するが，等方体の弾性スティフネステンソルの独立成分の数は，2 個なので，上記の 4 つの弾性率の間には相互に変換する関係式が存在し，どれか 2 つが分かれば，残りの 2 つは計算により求めることができる．一般の工業材料のヤング率を，表１に示す．

表１　工業材料のヤング率と剛性率

材料	ヤング率 E／GPa	剛性率 G／GPa
鋼	210	82
アルミニウム	70	26
ダイヤモンド	~1000	
SiC	420	
Al_2O_3	390	
Si_3N_4	300	
ZrO_2	200	
ガラス	70	
ポリマー	1-3	

３．弾性体の構成方程式の表示法

（１）テンソル表示

　学部 3 年の連続体力学で学習したように，応力テンソルσ_{ij}とひずみテンソルε_{kl}の間には，

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl}\varepsilon_{kl} \qquad (3)$$

と言う関係があり，これを一般化 Hooke の法則と言う．C_{ijkl} を弾性スティフネステ

ンソルである．一般化 Hooke の法則は，9 個の式からなる連立 1 次方程式なので，ε_{kl}について解くと，

$$\varepsilon_{ij} = S_{ijkl}\sigma_{kl} \qquad (4)$$

が得られる．この S_{ijkl} を弾性コンプライアンステンソルと呼ぶ．なお，イギリス系の研究者は，C_{ijkl} を elastic constant，S_{ijkl} を elastic modulus と呼ぶことがある．また，物理量の記号が物理量の名前の最初の文字と反対の関係になっていることに注意せよ，また，あまり見かけないが，テンソルひずみを用いた構成方程式を次のようにマトリックス表示することもできる．

$$\begin{pmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{32} \\ \sigma_{31} \\ \sigma_{13} \\ \sigma_{12} \\ \sigma_{21} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_{1111} & C_{1122} & C_{1133} & C_{1123} & C_{1132} & C_{1131} & C_{1113} & C_{1112} & C_{1121} \\ C_{2211} & C_{2222} & C_{2233} & C_{2223} & C_{2232} & C_{2231} & C_{2213} & C_{2212} & C_{2221} \\ & & & & \vdots & & & & \\ C_{2311} & C_{2322} & C_{2333} & C_{2323} & C_{2332} & C_{2331} & C_{2313} & C_{2312} & C_{2321} \\ & & & & \vdots & & & & \\ & & & & \vdots & & & & \\ & & & & \vdots & & & & \\ & & & & \vdots & & & & \\ C_{2111} & C_{2122} & C_{2133} & C_{2123} & C_{2132} & C_{2131} & C_{2113} & C_{2112} & C_{2121} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{32} \\ \varepsilon_{31} \\ \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{12} \\ \varepsilon_{21} \end{pmatrix} \qquad (5)$$

合計 9×9=81 個の C_{ijkl} 成分があるが，$C_{ijkl}=C_{jikl}=C_{ijlk}=C_{klij}$ の関係があるので，独立な成分は 21 個となる．

なお，弾性スティフネステンソル C_{ijkl} が 4 階テンソルであることは，次のようにするとわかる．旧座標系の応力をσ_{ij}，ひずみをε_{ij}とし，新座標系の応力をσ'_{ij}，ひずみをε'_{ij}とすると，次式が成り立つ．

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl}\varepsilon_{kl} \qquad (6)$$

$$\varepsilon_{kl} = \nu_{kt}\nu_{ls}\varepsilon'_{ts} \qquad (7)$$

$$\sigma'_{mn} = \nu_{mi}\nu_{nj}\sigma_{ij} \qquad (8)$$

ここで，(7)式は，$\varepsilon'_{ts} = \nu_{tk}\nu_{sl}\varepsilon_{kl} \rightarrow \nu_{sl}^{-1}\nu_{tk}^{-1}\varepsilon'_{ts} = \nu_{sl}^{-1}\nu_{tk}^{-1}\nu_{tk}\nu_{sl}\varepsilon_{kl} \rightarrow {}^{t}\nu_{sl}\,{}^{t}\nu_{tk}\varepsilon'_{ts} = \varepsilon_{kl} \rightarrow \nu_{ls}\nu_{kt}\varepsilon'_{ts} = \varepsilon_{kl}$ となることを利用した．

$$\sigma'_{mn} = \nu_{mi}\nu_{nj}C_{ijkl}\nu_{tk}\nu_{sl}\varepsilon'_{ts}$$

$$\therefore C'_{mnts} = \nu_{mi}\nu_{nj}\nu_{tk}\nu_{sl}C_{ijkl} \qquad (9)$$

これより，座標変換に関する新旧基底ベクトル間の方向余弦が 4 つかけ算して，弾性スティフネステンソルが変換されているので，弾性スティフネステンソルは 4 階テンソルであることがわかる．

（２）マトリックス表示（工学ひずみ表示）

2 階テンソルである応力σ_{ij}とひずみε_{ij}を，それらが対称テンソルであることを考慮して，6 次元ベクトルで表示し，それらの関係を 2 階のテンソル C_{mn} で示す表示方法をマトリックス表示という．まず，応力テンソルとひずみテンソルの成分は，

次のように書き換える，

$$
\begin{aligned}
&\sigma_{11} \to \sigma_1 && \varepsilon_{11} \to \varepsilon_1 \\
&\sigma_{22} \to \sigma_2 && \varepsilon_{22} \to \varepsilon_2 \\
&\sigma_{33} \to \sigma_3 && \varepsilon_{33} \to \varepsilon_3 \\
&\sigma_{23} = \sigma_{32} \to \sigma_4 && \varepsilon_{23} = \varepsilon_{32} \to \frac{1}{2}\varepsilon_4 \quad (\varepsilon_4 = 2\varepsilon_{23}) \\
&\sigma_{31} = \sigma_{13} \to \sigma_5 && \varepsilon_{31} = \varepsilon_{13} \to \frac{1}{2}\varepsilon_5 \quad (\varepsilon_5 = 2\varepsilon_{31}) \\
&\sigma_{12} = \sigma_{21} \to \sigma_6 && \varepsilon_{12} = \varepsilon_{21} \to \frac{1}{2}\varepsilon_6 \quad (\varepsilon_6 = 2\varepsilon_{12})
\end{aligned}
$$

テンソルひずみでは添字を順次足し合わせるので，せん断成分については，ε_{23} も ε_{32} もそれぞれ 1 回ずつ足しあわされるが，ここで示すマトリックス表示では，ε_4 はマトリックス計算上，1 回しか足しあわされないので，予め，ひずみの値を 2 倍にしておいてつじつまを合わせるために，$\varepsilon_{23} = \varepsilon_{32} = \frac{1}{2}\varepsilon_4$ ということにしている．このため，ε_4 は工学ひずみ γ_4 そのものと同じことになる．本によっては，ε_4，ε_5，ε_6 を γ_4，γ_5，γ_6 として工学ひずみであることを分かりやすく表示している場合もある．このようにすると，

$$\sigma_m = C_{mn}\varepsilon_n \qquad (10)$$

あるいは，

$$
\begin{pmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \end{pmatrix}
=
\begin{pmatrix}
C_{11} & C_{12} & C_{13} & C_{14} & C_{15} & C_{16} \\
C_{21} & C_{22} & C_{23} & C_{24} & C_{25} & C_{26} \\
C_{31} & C_{32} & C_{33} & C_{34} & C_{35} & C_{36} \\
C_{41} & C_{42} & C_{43} & C_{44} & C_{45} & C_{46} \\
C_{51} & C_{52} & C_{53} & C_{54} & C_{55} & C_{56} \\
C_{61} & C_{62} & C_{63} & C_{64} & C_{65} & C_{66}
\end{pmatrix}
\begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_4 \\ \varepsilon_5 \\ \varepsilon_6 \end{pmatrix}
\qquad (11)
$$

と表される．このように，応力テンソル σ_{ij} とひずみテンソル ε_{ij} の対称性（すなわち，独立な成分が 6 個ずつということ）だけを考慮すると，(11)式のように，36 個の独立な C_{mn} 成分を持つが，$C_{ijkl} = C_{klij}$，すなわち，$C_{mn} = C_{nm}$ という対称性(弾性ひずみエネルギー関数 W がひずみ ε_{ij} の正値 2 次形式 $W = \frac{1}{2}C_{ijkl}\varepsilon_{ij}\varepsilon_{kl}$ で表されることによる)も考慮すると，C_{mn} も対称テンソルとなるため，片側の非対角項がもう一つの非対角項と等しくなり，

$$
\begin{pmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \end{pmatrix}
=
\begin{pmatrix}
C_{11} & C_{12} & C_{13} & C_{14} & C_{15} & C_{16} \\
 & C_{22} & C_{23} & C_{24} & C_{25} & C_{26} \\
 & & C_{33} & C_{34} & C_{35} & C_{36} \\
 & & & C_{44} & C_{45} & C_{46} \\
 & Sym. & & & C_{55} & C_{56} \\
 & & & & & C_{66}
\end{pmatrix}
\begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_4 \\ \varepsilon_5 \\ \varepsilon_6 \end{pmatrix}
\qquad (12)
$$

となって，独立な成分の数は 21 個になる．

同様に，弾性コンプライアンス S_{ijkl} も，

$$\varepsilon_m = S_{mn}\sigma_n \qquad (13)$$

というマトリックス表示ができるが，その際は，次の変換を伴うので，注意すること．

$$\begin{cases} S_{ijkl} = S_{mn} & (Both\_m\_and\_n\_=1,2,3) \\ S_{ijkl} = \dfrac{1}{2}S_{mn} & (Either\_m\_or\_n\_=4,5,6) \\ S_{ijkl} = \dfrac{1}{4}S_{mn} & (Both\_m\_and\_n\_=4,5,6) \end{cases} \qquad (14)$$

このようにする理由は，ε_{11} と ε_{23} を書き下してから，マトリックス表示に直してみると，このようにしないと数が合わないことから分かる．すなわち，

同じものが 2 つでてくるから，S_{16} を予め，半分にしておく

$$\begin{aligned} \varepsilon_{11} &= S_{1111}\sigma_{11} + S_{1112}\sigma_{12} + S_{1113}\sigma_{13} \\ &+ S_{1121}\sigma_{21} + S_{1122}\sigma_{22} + S_{1123}\sigma_{23} \\ &+ S_{1131}\sigma_{31} + S_{1132}\sigma_{32} + S_{1133}\sigma_{33} \end{aligned} \rightarrow \begin{aligned} \varepsilon_1 &= S_{11}\sigma_1 + \frac{1}{2}S_{16}\sigma_6 + \frac{1}{2}S_{15}\sigma_5 \\ &+ \frac{1}{2}S_{16}\sigma_6 + S_{12}\sigma_2 + \frac{1}{2}S_{14}\sigma_4 \\ &+ \frac{1}{2}S_{15}\sigma_5 + \frac{1}{2}S_{14}\sigma_4 + S_{13}\sigma_3 \end{aligned} \qquad (15)$$

同様に，

マトリックス表示に変換する時に，ひずみは，半分になっている．

さらに，同じものが 2 つでてくるから，S_{46} を予め，1/4 にしておく

$$\begin{aligned} \varepsilon_{23} &= S_{2311}\sigma_{11} + S_{2312}\sigma_{12} + S_{2313}\sigma_{13} \\ &+ S_{2321}\sigma_{21} + S_{2322}\sigma_{22} + S_{2323}\sigma_{23} \\ &+ S_{2331}\sigma_{31} + S_{2332}\sigma_{32} + S_{2333}\sigma_{33} \end{aligned} \rightarrow \begin{aligned} \frac{1}{2}\varepsilon_4 &= \frac{1}{2}S_{41}\sigma_1 + \frac{1}{4}S_{46}\sigma_6 + \frac{1}{4}S_{45}\sigma_5 \\ &+ \frac{1}{4}S_{46}\sigma_6 + \frac{1}{2}S_{42}\sigma_2 + \frac{1}{4}S_{44}\sigma_4 \\ &+ \frac{1}{4}S_{45}\sigma_5 + \frac{1}{4}S_{44}\sigma_4 + \frac{1}{2}S_{43}\sigma_3 \end{aligned} \qquad (16)$$

S_{46} も，2 回出てくるので，予め，1/2 にするが，ε_4 が，既に，マトリックス表示の段階で半分になっているので，1/2×1/2＝1/4 となる．

4．弾性の起源

物体に力を加えると変形し，力を除くと，元の大きさ・形に戻る性質を弾性という．弾性の他に，物体の力学的応答には，塑性，粘性，そして，これらを組み合わせた弾塑性，粘弾性，粘塑性というものもある．さらに，流体になると，完全流体，粘性流体という区別があり，さらに，それらの間に，圧縮性と非圧縮性という性質

も関わってくる．ここでは，弾性の起源について考察する．

弾性には，金属やセラミックスのようなエネルギー弾性と，ポリマーで見られるエントロピー弾性がある．まずは，この違いを理解するために，弾性体の等温可逆変形を考える．熱力学第１法則より，単位体積当たりの内部エネルギーU の変化分 dU は，

$$dU = \delta Q + \sigma d\varepsilon \qquad (26)$$

となる．ここで，Q は単位体積当たりの熱の流入量，σ は応力，ε はひずみである．さらに，熱力学第 2 法則より，可逆過程では，単位体積当たりのエントロピー変化 dS は，次式で表される．

$$dS = \frac{\delta Q}{T} \qquad (27)$$

(26)式と(27)式を組み合わせると，等温可逆過程では，

$$\sigma = \left(\frac{\partial U}{\partial \varepsilon}\right)_T - T\left(\frac{\partial S}{\partial \varepsilon}\right)_T \qquad (28)$$

となる．第１項は，ひずみの増加によって内部エネルギーが増加することによって生じる応力を，第２項はひずみの増加によってエントロピーが減少することによって生じる応力を表す．

一方，単位体積当たりのヘルムホルツ自由エネルギーF は，

$$F = U - TS \qquad (29)$$

となり，その微小変化は，

$$\begin{aligned} dF &= dU - TdS - SdT \\ &= \delta Q + \sigma d\varepsilon - TdS - SdT \end{aligned} \qquad (30)$$

等温条件なので，dT=0 を考慮して，(30)式より，

$$\left(\frac{\partial F}{\partial \varepsilon}\right)_T = \sigma \qquad (31)$$

となる．一方，ひずみ一定で，温度が d T だけ準静的に変化した場合は，

$$\left(\frac{\partial F}{\partial T}\right)_\varepsilon = -S \qquad (32)$$

(31)式と(32)式より，

$$\left(\frac{\partial \sigma}{\partial T}\right)_\varepsilon = \frac{\partial}{\partial T}\left(\frac{\partial F}{\partial \varepsilon}\right) = \frac{\partial^2 F}{\partial T \partial \varepsilon} = \frac{\partial}{\partial \varepsilon}\left(\frac{\partial F}{\partial T}\right) = -\left(\frac{\partial S}{\partial \varepsilon}\right)_T \qquad (33)$$

この関係式を(28)式に代入すると，

$$\sigma = \left(\frac{\partial U}{\partial \varepsilon}\right)_T + T\left(\frac{\partial \sigma}{\partial T}\right)_\varepsilon \qquad (34)$$

8%加硫ゴムをひずみ一定にしながら，230K 以上の温度域で温度をあげていくと，加硫ゴムの応力 σ と温度 T の間には，σ ＝cT という比例関係が認められる．これは，(28)式で考えると，

$$\sigma = 0 - T\left(\frac{\partial S}{\partial \varepsilon}\right)_T \qquad (35)$$

と近似でき，第 2 項の $(\partial S/\partial \varepsilon)_T$ が負であれば良く，もし，そうであるならば，(33)

式より，

$$\left(\frac{\partial \sigma}{\partial T}\right)_{\varepsilon} > 0 \qquad (36)$$

となり，ひずみ一定の条件で温度を上げていくと，応力を増加させなければならない．これは，温度と共に，ヤング率が増加することを意味する．このような弾性をエントロピー弾性あるいはゴム弾性という．先ほどの加硫ゴムも，230K 以下であれば，ゴム弾性を示さず，ガラス状の固体になる．この臨界温度をガラス転移点という．

エントロピー弾性を示すのは，ゴムのような鎖状高分子からなるエラストマーである．ガラス転移点以上の温度域では，鎖状高分子の主鎖の分子回転が頻繁に起こっているが，加硫ゴムでは，イオウによる架橋のため，鎖状高分子が重心運動できないため（ミクロブラウン運動をするという），弾性的な変形をすることになる．そして，温度が上がると，今まで分子回転によって折れ曲がっていた鎖状高分子が荷重方向に引き延ばされるためにエントロピーが減少し，また，エントロピーを減少させるために，より多くの応力が必要となるため，温度と共に，ヤング率が増加する訳である．

さて，エントロピー弾性はこれくらいにして，金属やセラミックスに見られるエネルギー弾性について簡単に説明する．これは，外力がなした仕事が原子間の距離や結合角の変化として内部エネルギーの形で蓄えられる場合である．(28)式で考えると，

$$\sigma = \left(\frac{\partial U}{\partial \varepsilon}\right)_{T} - 0 \qquad (37)$$

となる．エントロピー弾性ほどではないが，エネルギー弾性も温度依存性を持ち，それは，温度が上がると，徐々にヤング率が減少することになる．これは，高温になると，原子間の結合が緩んで外力が大きくなくても，容易に変形できるようになるからである．