

第 10 回 破壊力学(エネルギー論)

材料工学専攻
准教授 安田公一

1. エネルギー解放率 G_I

前回の議論は応力論に基づくものであるが、これとは別にエネルギー論による破壊靱性の考え方もある。前回の配布資料の図 2 に示したように、長さ $2a$ の 2 次元貫通き裂を含む部材に外部応力 σ^∞ を負荷した場合を考える。ここで、Griffith は、『主き裂が単位表面積だけ進展する際に解放される全系の力学的ポテンシャルエネルギーが、主き裂の新しい破面を形成するために必要な仕事を越える時に破壊が起こる』とした。すなわち、次式となる。

$$d(-\pi) = d(-W - \pi^*) \geq 4\gamma da \quad (15)$$

π は全系の力学的ポテンシャルエネルギー、 W は弾性ひずみエネルギー（すなわち弾性体のポテンシャルエネルギー）、 π^* は外力系のポテンシャルエネルギー、 γ は表面エネルギーである。

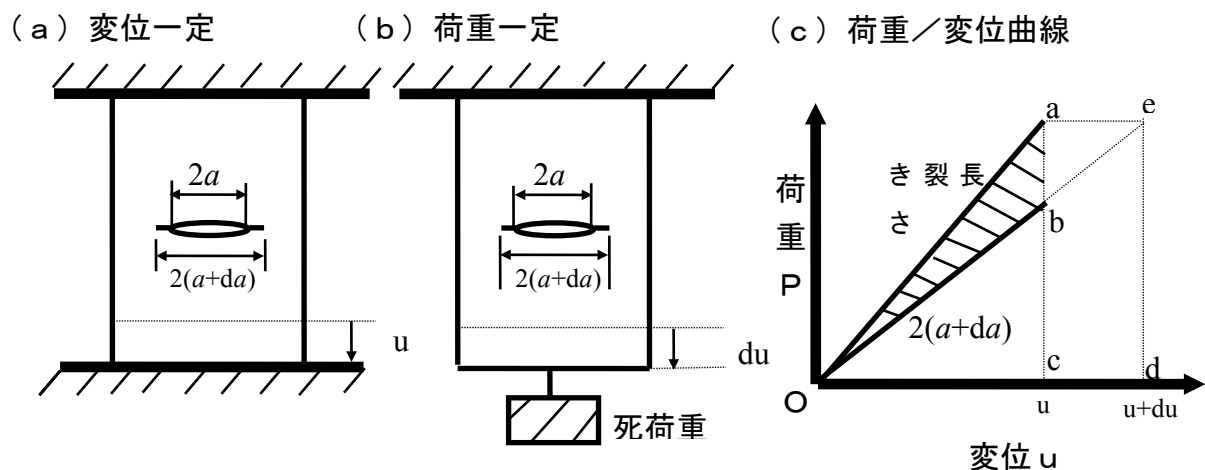


図 5 き裂進展と荷重／変位曲線

例えば、図 5(a) に示すように、変位一定の条件で長さ $2a$ の主き裂を両側に da だけ進展させた場合には、外力系のポテンシャルエネルギー変化はゼロであるが、弾性ひずみエネルギーは、図 5(c) 中の $\triangle Oab$ の面積に相当する分だけ減少する。この過程を時系列の順番で示すと図 6 のようになる。

また、図 5(b) に示すように、荷重一定の条件で主き裂を両側に da だけ進展させた場合には、弾性ひずみエネルギーは $\triangle Oae$ の面積に相当する分だけ増加するが、これと同時に外力系のポテンシャルエネルギーは $\square acde$ の面積に相当する分だけ減少する。これはちょうど $\triangle Oae$ の面積の 2 倍となっているので、差し引き、 $\triangle Oae$ の面積に相当する分だけポテンシャルエネルギーが減少していることになる。したがって、解放される全系の力学的ポテンシャルエネルギーは、負荷条件によらず弾性ひずみエネルギーの変化分に等しいことがわかる。この過程を時系列順に示すと図

7 のようになる.

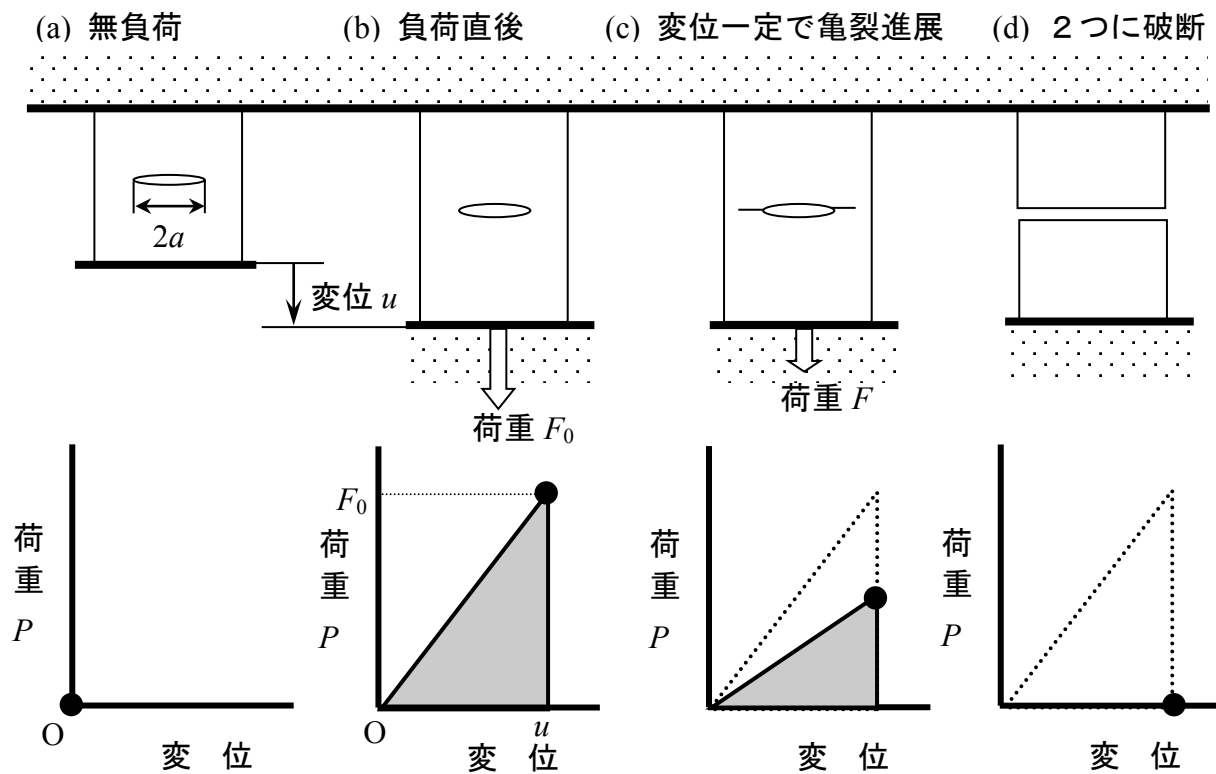


図6 変位一定条件での亀裂の微小進展と力学的エネルギー変化

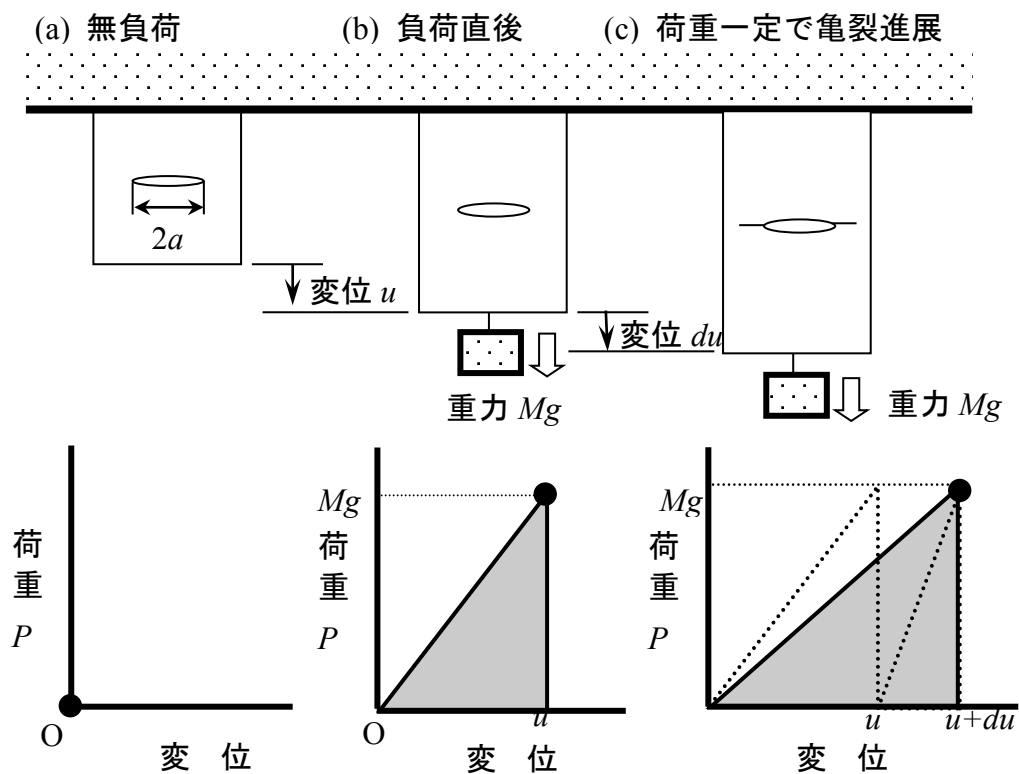


図7 荷重一定条件での亀裂の微小進展と力学的エネルギー変化

そこで、(15)式を書き換えると次式となる。

$$\frac{dW}{da} \geq 4\gamma \quad (16)$$

ここで、長さ $2a$ の 2 次元貫通き裂が存在する無限体における弾性ひずみエネルギー W は、弾性力学によって既に解かれていて、平面ひずみ条件の場合は次式となる。

$$W = \frac{\pi(1-\nu^2)a^2(\sigma^\infty)^2}{E} \quad (17)$$

ここで、 σ^∞ は外部応力、 E はヤング率、 ν はポアソン比である。(17) 式を (16) 式に代入し、等号が成り立つ時の外部応力 σ^∞ を破壊応力 σ_f^∞ とすれば、次式が得られる。

$$\sigma_f^\infty = \sqrt{\frac{2E\gamma}{(1-\nu^2)\pi a}} \quad (18)$$

これが有名な Griffith の式である。

なお、破壊力学では、『主き裂が単位面積だけ増加する時に解放される全系の力学的ポテンシャルエネルギー』をエネルギー解放率 G_I (ジー・ワンと読む) として次式で定義している。

$$G_I \equiv -\frac{\partial \pi}{\partial A} = \frac{\pi(1-\nu^2)a(\sigma^\infty)^2}{E} \quad (19)$$

ここで A はき裂面積である (き裂表面積でないことに注意!)。そして、このエネルギー解放率 G_I が材料固有の臨界値 G_{IC} ($= 2\gamma$: ジー・ワン・シーと読む) に達した時に破壊が起こると考えるのである。この G_{IC} のことを臨界エネルギー解放率と呼び、臨界応力拡大係数 K_{IC} と同様に線形弾性体の破壊靱性パラメーターの 1 種である。以上がエネルギー論に基づく破壊靱性の考え方である。

なお、応力拡大係数 K_I とエネルギー解放率 G_I には次式の間があることが理論的に導かれている。

$$\frac{EG_I}{1-\nu^2} = (K_I)^2 \quad (21)$$

この導出は、次のようになる。変位一定の条件を考えると、図 5(c) の点 a から点 b に変化した時の力学的ポテンシャルエネルギーの解放量は $G_I dA$ となり、この場合は、弾性エネルギーの解放量そのものと同じになる。この過程を 2 つの過程に分けて考える。

- ① まず、き裂の先端に δA だけ切れ込みを入れ、この新しいき裂面に、切れ込みを入れる前に作用していた応力をそのまま保つように、この面に外力を作用させ、新しいき裂面が閉じたままにしておく。
- ② 次に、表面に作用させておいた力を徐々に減少させて 0 とし、き裂面を開かせ、自由表面とする。

① の過程では、原子間結合を切って、新しい表面を作るためのエネルギーが必要であるが、このエネルギーは②の過程によって解放される力学的ポテンシャルエネルギーから供給されるので、②の過程について、さらに考察を進める。

①の過程が終わった段階では、新しいき裂面近傍では、切れ込みを入れる前の状態と同じであるから、弾性エネルギーは変化していない。したがって、弾性エネルギーの変化を計算するには、②の過程での変化を考えればよい。図8(a)に示すき裂進展前の状態において、新しいき裂面になる $y=0$ の面に作用している応力は、この時の応力拡大係数を $K_I(A)$ とすると、

$$\sigma_y(x) = \frac{K_I(A)}{\sqrt{2\pi x}} \quad (22)$$

となる。次に、図8(b)に示すように、 z 方向の厚さ δB の部分で、き裂が x 方向に δa だけ進展した時、すなわち、 $\delta A = \delta B \cdot \delta a$ の面積増加が生じたのちのき裂内面の変位は、この時の応力拡大係数を $K_I(A + \delta A)$ と置くと、

$$v(x) = \pm \frac{\kappa+1}{2G} K_I(A + \delta A) \sqrt{\frac{\delta a - x}{2\pi}} \quad (23)$$

ただし、複号はき裂の上面・下面に対応する。したがって、②の過程で、任意の x における $\sigma_y(x)$ と $v(x)$ の関係は、図8(c)に示すように直線関係を保ちながら最終状態に至るはずである。しかも、外界から作用される応力 $\sigma_y(x)$ の作用方向と変位 $v(x)$ の方向とは逆向きなので、弾性体は外力に対して仕事をするることになり、言い換えれば、弾性エネルギーが解放されることになっている。

そこで、き裂の上面と下面でなされる仕事を計算すれば、

$$\begin{aligned} G_I \delta B \delta a &= 2 \int_0^{\delta a} \frac{\sigma_y v}{2} \delta B dx \\ &= \frac{\kappa+1}{8G} \delta B \delta a K_I(A) K_I(A + \delta A) \\ \therefore G_I &= \frac{\kappa+1}{8G} K_I^2 \quad (\delta a \rightarrow 0) \end{aligned} \quad (24)$$

となる。ヤング率 E で書き換えれば、

$$G_I = \frac{1}{E'} K_I^2 \quad \left(E' = \begin{cases} E & (\text{for plain stress}) \\ \frac{E}{1-\nu^2} & (\text{for plain strain}) \end{cases} \right) \quad (25)$$

となり、先の(21)式は、平面ひずみの場合の式であることがわかる。このように、応力拡大係数とエネルギー解放率は互いに変換可能なので、破壊靱性に関する応力論とエネルギー論とは見方が違うだけで基本的に等価な考え方であることがわかる。

2. コンプライアンス法

き裂面積 A の異なる試験片のコンプライアンス $\lambda(A)$ を測定することにより、ある特定のき裂面積をもつ試験片のエネルギー開放率 G_I を算出できる方法がある。これをコンプライアンス法という。

線型弾性体では、荷重 P と荷重点変位 u の間には、次式の関係がある。

$$u = \lambda(A) P \quad (26)$$

この時、弾性エネルギー W は、

$$\begin{aligned}
 W &= \frac{1}{2} Pu \\
 &= \frac{1}{2} \lambda P^2 \quad (27) \qquad \qquad \qquad = \frac{1}{2\lambda} u^2 \quad (28)
 \end{aligned}$$

となる。変位一定の場合、 $-\pi = -W(u, A)$ となるので、これを(19)式に代入すると、

$$\begin{aligned}
 G_I &= -\frac{\partial \pi}{\partial A} \\
 &= -\frac{\partial W(u, A)}{\partial A} \\
 &= -\frac{\partial}{\partial A} \left[\frac{1}{2\lambda(A)} u^2 \right] \\
 &= \frac{u^2}{2} \frac{\partial}{\partial A} \left[\frac{-1}{\lambda(A)} \right] \\
 &= \frac{u^2}{2} \frac{1}{\lambda^2(A)} \frac{\partial \lambda(A)}{\partial A} \\
 &= \frac{1}{2} P^2 \frac{\partial \lambda(A)}{\partial A} \quad (29)
 \end{aligned}$$

となる。同様に、荷重一定の場合、 $-\pi = W(P, A)$ となるので、これを(19)式に代入すると、

$$\begin{aligned}
 G_I &= -\frac{\partial \pi}{\partial A} \\
 &= \frac{\partial W(P, A)}{\partial A} \\
 &= \frac{\partial}{\partial A} \left[\frac{1}{2} \lambda(A) P^2 \right] \\
 &= \frac{P^2}{2} \frac{\partial}{\partial A} \lambda(A) \\
 &= \frac{1}{2} P^2 \frac{\partial \lambda(A)}{\partial A} \quad (30)
 \end{aligned}$$

となる。すなわち、予め $\lambda(A)$ を実験的に求めるか（亀裂面積の異なる試験片を多数用意して、それらのコンプライアンスを測定する）、あるいは、有限要素法で数値解析的に求めておけば、ある特定の亀裂面積の試験片に荷重 P が作用した場合のエネルギー開放率 G_I を(29)式および(30)式から求めることができるということになる。

なお、通常は、試験片幅 B が一定の試験片を使うことが多いので、 $dA = B da$ の関係を使って（ a はき裂長さ）、

$$G_I = \frac{P^2}{2B} \frac{d\lambda(a)}{da} \quad (31)$$

という式を用いる。