第 5 回　粘弾性論，ポリマー材料各論

東京工業大学
材料工学専攻
准教授　安田公一

１．はじめに

今回は，ポリマーの力学モデル，あるいは，金属やセラミックスの高温変形・高温クリープのモデルである粘弾性力学について講義する．また，ポリマー材料の力学的特性についても概説する．

２．粘弾性モデルの要素

弾性や塑性では，その時間依存性を考えてこなかったが，粘弾性については時間依存性を陽に考える必要がある．それは，粘弾性体においては，応力緩和およびクリープという現象があり，前者では，ひずみを一定に保った時に，応力が時間と共に減少し，後者では，応力を一定に保った時に，ひずみが時間と共に増加するからである．

このような粘弾性体の力学応答を表すモデルの要素には，バネ要素とダッシュポット要素がある．また，粘弾性体の要素としては，あまり使われないが，塑性流動のモデルであるビンガム流動（降伏応力を持つ流動）を表現するためにスライダー要素というものもある．

バネ要素は線型弾性体のモデルであり，その応力／ひずみ関係は，

$$\sigma = k\varepsilon \qquad (1)$$

となる．ここで，k は弾性率を表す．また，ダッシュポット要素は粘性体のモデルであり，その応力／ひずみ関係は，

$$\sigma = \eta\dot{\varepsilon} \qquad (2)$$

となる．ここで，η は粘性率を表す．また，スライダー要素は塑性変形（塑性流動）のモデルであり，その応力/ひずみ関係は，

$$\sigma - \sigma_y = f(\varepsilon) \qquad (3)$$

となる．ここで，σ_y は降伏応力である．これらの要素を組み合わせると，いろいろなモデルが作れるが，その中で，次の 2 要素モデルが基本的である．

（１）Maxwell モデル（粘弾性流体）

図 1 のように，バネ要素とダッシュポット要素を直列に並べたもので，ある瞬間から，ひずみを一定に保持し続けても，ダッシュポットが伸びて応力を緩和するので，粘弾性流体の最も基本的なモデルとなっている．このモデルの構成方程式は，バネもダッシュポットも同じ応力であるが，ひずみは，バネとダッシュポットの寄与を足したものになるので，

図１　Maxwell モデル

$$\dot{\varepsilon} = \frac{1}{k}\dot{\sigma} + \frac{1}{\eta}\sigma \qquad (4)$$

となるが，(4)式の両辺に k を掛けて，

$$k\dot{\varepsilon} = \dot{\sigma} + \frac{k}{\eta}\sigma = \dot{\sigma} + \frac{1}{\tau_M}\sigma \qquad (5)$$

と表し，$\tau_M(=\eta/k)$を緩和時間という．

（２）Voigt モデル

図２のように，バネ要素とダッシュポット要素を並列に並べたもので，一定の応力をかけ続けると，ひずみが時間と共に増加することから，粘弾性固体の最も基本的なモデルとなっている．このモデルの構成方程式は，バネもダッシュポットも同じひずみであるが，応力は，バネとダッシュポットの寄与を足したものになるので，

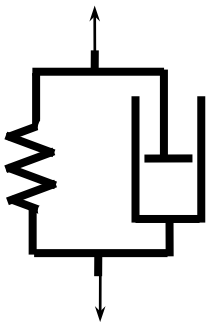

図２　Voigt モデル

$$\sigma = k\varepsilon + \eta\dot{\varepsilon} \qquad (6)$$

となるが，(6)式の両辺を粘性率で除して，

$$\frac{1}{\eta}\sigma = \frac{k}{\eta}\varepsilon + \dot{\varepsilon} = \frac{1}{\tau_V}\varepsilon + \dot{\varepsilon} \qquad (7)$$

と表し，$\tau_V(=\eta/k)$を遅延時間という．

３．応力緩和とクリープ

t= -∞で $\sigma(t)=0$ と $\varepsilon(t)=0$ を初期条件とし，Maxwell モデルの構成方程式を微分方程式として解くと，

$$\sigma(t) = k\left[\varepsilon(t) - \int_{-\infty}^{t} \frac{1}{\tau_M} e^{-\frac{t-\tau}{\tau_M}} \varepsilon(\tau) d\tau\right] \qquad (8)$$

これが，Maxwell モデルにおける 任意のひずみ変化 $\varepsilon(t)$ に対応した応力 $\sigma(t)$ の時間変化を表す式になる．

先に述べたように，応力緩和とは，物体を一定のひずみ状態 ε_0 で保持したときに，応力 $\sigma(t)$ が時間と共に減少する現象をいう．単位ひずみ当たりの応力の変化を緩和弾性率あるいは応力緩和関数 $E_r(t)$ と呼び，次式で定義する．

$$E_r(t) = \frac{\sigma(t)}{\varepsilon_0} \qquad (9)$$

また，物体を一定の応力状態 σ_0 で保持したときに，ひずみ $\varepsilon(t)$ が時間と共に増加する現象をクリープという．単位応力あたりのひずみの変化をクリープコンプライアンス $D_c(t)$ と呼び，次式で定義する．

$$D_c(t) = \frac{\varepsilon(t)}{\sigma_0} \qquad (10)$$

４．応力緩和積分法則・クリープ積分法則

まず，図 5 に示すように，任意のひずみ変化 ε (t) を与えた時の，応力変化 σ (t) について考える．実際のひずみ変化 ε (t) を図中の点線のように，微小なステップ関数の重ね合わせであると見なす．例えば，時刻 t=0 の時，$\Delta\varepsilon_0$ が与えられ，時刻 $t=t_1$ の時に，$\Delta\varepsilon_1$ が与えられるものと考えればよい．

t=0 の時に，$\Delta\varepsilon_0$ が与えられた場合の応力変化は緩和弾性率の定義から，時刻 t=t において $E_r(t)\Delta\varepsilon_0$ になることは，前節の結果からわかる．同様に，$t=t_1$ の時に，$\Delta\varepsilon_1$ が与えられた場合の応力変化は，時刻 t=t において $E_r(t-t_1)\Delta\varepsilon_1$ となる．これらを全て重ね合わせると，

$$\sigma(t)=\sum_i E_r(t-t_i)\Delta\varepsilon_i \qquad (18)$$

時間間隔 $\Delta t=t_i-t_j$ を小さくした極限では，(18) 式は，次式のたたみ込み積分で表すことができる．

$$\begin{aligned}\sigma(t)&=\int_0^t E_r(t-\tau)d\varepsilon(\tau)\\&=\int_0^t E_r(t-\tau)\frac{d\varepsilon(\tau)}{d\tau}d\tau \qquad (19)\end{aligned}$$

(19) 式を単軸負荷に関する応力緩和積分法則という．

５．複素弾性率と複素コンプライアンス

ここでは，粘弾性体に単軸周期応力が負荷された場合を考える．複素数値関数には *を付けて表すことにすると，単軸周期応力 $\sigma^*(t)$は，

$$\sigma^*(t)=\sigma_0 e^{i\omega t} \qquad (21)$$

ここで，σ_0 は周期応力の振幅，ω は角振動数($\omega=2\pi f$, f は振動数)である．この時，ひずみも同様な周期関数で表されるが，位相が δ だけ遅れるものとする．

$$\varepsilon^*(t)=\varepsilon_0 e^{i(\omega t-\delta)} \qquad (22)$$

ここで，ε_0 は周期ひずみの振幅を表す．この時，複素弾性率 $E^*(\omega)$と複素コンプライアンス $D^*(\omega)$ は，次式で定義される．

$$E^*(\omega)\equiv\frac{\sigma^*(t)}{\varepsilon^*(t)}=\frac{\sigma_0}{\varepsilon_0}e^{i\delta} \qquad (23)$$

$$D^*(\omega)\equiv\frac{\varepsilon^*(t)}{\sigma^*(t)}=\frac{\varepsilon_0}{\sigma_0}e^{-i\delta} \qquad (24)$$

（以下，省略）

６．高分子材料の一般的性質

（以下，省略）