

となる。したがって、 $\mathbf{p} = \mathbf{P}\mathbf{r}$ とおくと、

$$\mathbf{Q}\mathbf{p} = \mathbf{P}\mathbf{P}^T\mathbf{Q}\mathbf{P}\mathbf{r} = \lambda\mathbf{P}\mathbf{r} = \lambda\mathbf{p}, \quad \mathbf{p} \neq \mathbf{0}$$

である。ゆえに、 λ は $\mathbf{Q}$ の固有値で $\mathbf{p}$ は λ に対応する $\mathbf{Q}$ の固有ベクトルとなる。

ここで、 $\mathbf{P}^T\mathbf{Q}\mathbf{P}$ を計算すると以下ようになる。

$$\begin{aligned} \mathbf{P}^T\mathbf{Q}\mathbf{P} &= \begin{pmatrix} \mathbf{p}_1^T \\ \mathbf{p}_2^T \\ \vdots \\ \mathbf{p}_n^T \end{pmatrix} \mathbf{Q} (\mathbf{p}_1 \ \mathbf{p}_2 \ \cdots \ \mathbf{p}_n) = \begin{pmatrix} \mathbf{p}_1^T \\ \mathbf{p}_2^T \\ \vdots \\ \mathbf{p}_n^T \end{pmatrix} (\mathbf{Q}\mathbf{p}_1 \ \mathbf{Q}\mathbf{p}_2 \ \cdots \ \mathbf{Q}\mathbf{p}_n) \\ &= \begin{pmatrix} \mathbf{p}_1^T \\ \mathbf{p}_2^T \\ \vdots \\ \mathbf{p}_n^T \end{pmatrix} (\lambda_1\mathbf{p}_1 \ \lambda_2\mathbf{p}_2 \ \cdots \ \lambda_n\mathbf{p}_n) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix} \end{aligned}$$

2 次形式 $g(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T\mathbf{Q}\mathbf{x}$, $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ に対して変数変換 $\mathbf{y} = \mathbf{P}^T\mathbf{x}$ を施す。 $\mathbf{P}$ は直交行列であるから、 $\mathbf{x} = \mathbf{P}\mathbf{y}$ となる。ゆえに、

$$\begin{aligned} g(\mathbf{x}) &= \mathbf{x}^T\mathbf{Q}\mathbf{x} = (\mathbf{P}\mathbf{y})^T\mathbf{Q}(\mathbf{P}\mathbf{y}) = \mathbf{y}^T\mathbf{P}^T\mathbf{Q}\mathbf{P}\mathbf{y} \\ &= (y_1 \ y_2 \ \cdots \ y_n) \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \\ &= \lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \cdots + \lambda_n y_n^2. \end{aligned}$$

ゆえに、まとめると以下ようになる。

$$\begin{aligned} g(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T\mathbf{Q}\mathbf{x} \geq 0, \quad \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, \quad \text{すなわち } \mathbf{Q} \text{ は非負定値} \\ \Updownarrow \\ \mathbf{y}^T\mathbf{P}^T\mathbf{Q}\mathbf{P}\mathbf{y} \geq 0, \quad \forall \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n \\ \Updownarrow \\ \lambda_i \geq 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n). \quad \text{すなわち, } \mathbf{Q} \text{ のすべての固有値は非負} \end{aligned}$$

よって、以下のことも言える。

$$\begin{aligned} g(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T\mathbf{Q}\mathbf{x} > 0, \quad \mathbb{R}^n \ni \forall \mathbf{x} \neq \mathbf{0}, \quad \text{すなわち } \mathbf{Q} \text{ は正定値} \\ \Updownarrow \\ \mathbf{y}^T\mathbf{P}^T\mathbf{Q}\mathbf{P}\mathbf{y} > 0, \quad \mathbb{R}^n \ni \forall \mathbf{y} \neq \mathbf{0} \\ \Updownarrow \\ \lambda_i > 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n). \quad \text{すなわち, } \mathbf{Q} \text{ のすべての固有値は正} \end{aligned}$$

非正定値、負定値の場合も同様になるので、固有値に関する定理が証明できたことになる。

注意：上記の 4 つの $\Updownarrow$ のうち、1 番目と 3 番目のものは、 $\mathbf{P}$ が（直交行列であるため）正則行列であるので成り立つ。

10.5 2次形式の等高線

Q を $n \times n$ 次元の対称行列, α を実数とする. 2次形式

$$g(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T Q \mathbf{x} \quad (\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n)$$

に対して, その等高線 (面)

$$C_\alpha := \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid g(\mathbf{x}) = \alpha\}$$

について考える. 前節で行った座標変換 $\mathbf{x} = P\mathbf{y}$ をほどこすと, 等高線は新しい座標で

$$C_\alpha := \{\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n \mid \sum_{i=1}^n \lambda_i y_i^2 = \alpha\}$$

と書ける.

以下では簡単のために, まず $n = 2$ の場合について考える.

(a) $\lambda_2 > \lambda_1 > 0, \alpha = 1$ のとき: 図 22 参照.

(b) $\lambda_1 > 0 > \lambda_2, \alpha = 1$ のとき: 図 23 参照.

(c) $0 > \lambda_1 > \lambda_2, \alpha = 1$ のとき: $C_\alpha = \emptyset$ となるが, $\alpha = -1$ とすると (a) のときと同じような等高線となるが λ_1, λ_2 それぞれの絶対値の平方根の逆数をとった値が軸の長さに相当する. 図 22 参照.

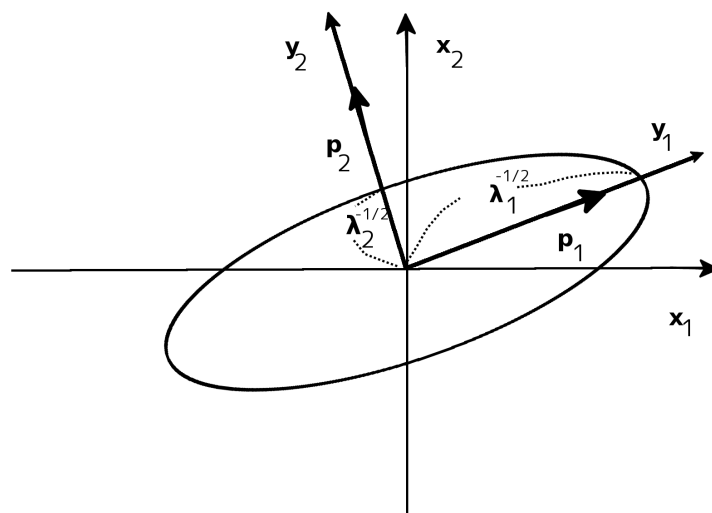


図 22: 2次元における2次形式の等高線—2つの固有値が同じ符号を持つ場合.

[問題 10-09] 2×2 対称行列の2つの固有値のうち1つが0であるときには, 等高線はどのようなになるか図示せよ.

[問題 10-10] 2×2 行列 $Q = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ に対して,

(a) Q の固有値, 固有ベクトルを求めよ.

(b) 等高線 $C_1 := \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 \mid \mathbf{x}^T Q \mathbf{x} = 1\}$ を図示せよ.

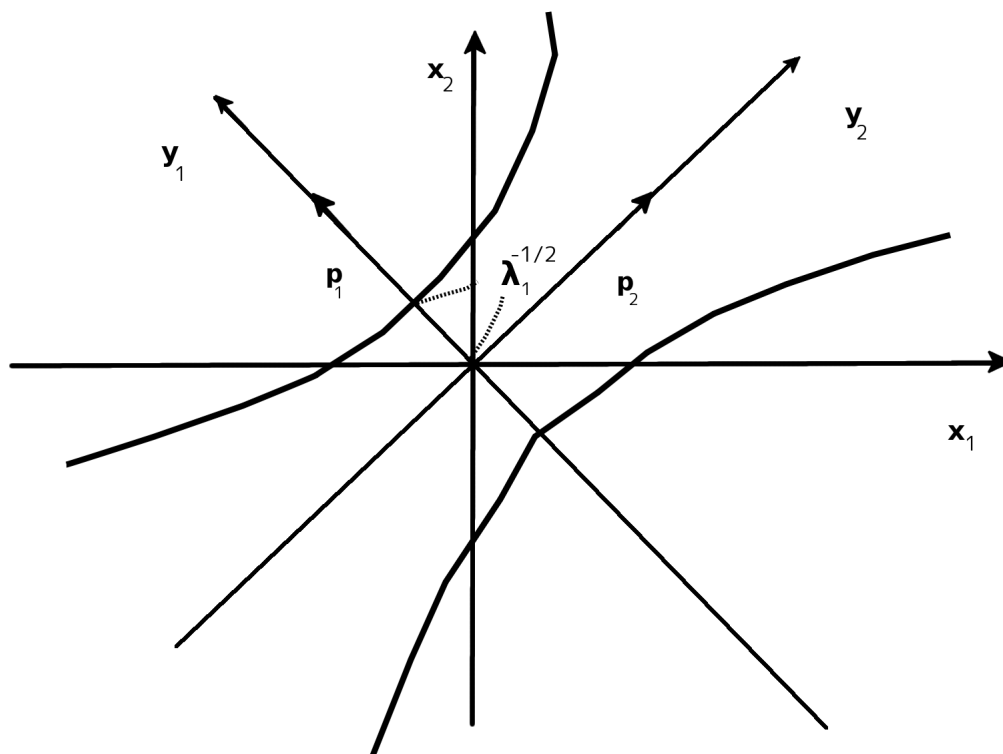


図 23: 2次元における2次形式の等高線—2つの固有値が異なる符号を持つ場合.

[問題 10-11] $n \times n$ 対称行列 Q に対して, 変数ベクトル $x \in \mathbb{R}^n$ に関する2次形式を $g(x) = x^T Q x$ で定義する. Q の n 個の固有値 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ は互いに異なっていることを仮定する.

- (a) 固有値 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ に対応する固有ベクトル $p_1, p_2, \dots, p_n$ を $\mathbb{R}^n$ の正規直交基底にとれることを証明せよ.
- (b) Q のすべての固有値 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ が非負であることは, Q が非負定値行列であるための必要十分条件であることを証明せよ.

$n = 3$ の場合には等高線ではなくて, 等高面になる. 特に, すべての固有値が正の場合には等高面は楕円体になる.

11 複素行列の固有値

今までは, 実数の n 次元 Euclid 空間や実数行列を扱ってきた. ここでは少し一般化して, 複素行列を考える. つまり $A = (a_{ij})$ を $m \times n$ 複素行列とすると, $a_{ij} \in \mathbb{C}$ ($i = 1, 2, \dots, m; j = 1, 2, \dots, n$) である.

実数行列と同様に n 次複素正方行列 A の固有値 λ や固有ベクトル p が定義できるが, それらの要素は複素数になることに注意されたい.

定義 11.1: H を n 次複素正方行列とし, $H^* = H$ が成り立つとき, H を Hermite 行列 とよぶ. ただし, $H^* := \overline{H}^T$ は H の 随伴行列 を意味する.