

# 応用線形代数—第4回レポート

東京工業大学 情報理工学院 数理・計算科学系  
福田光浩

2017年度 第1クォーター

提出〆切 5月18日(木) 15時まで

レポートボックス1-1 応用線形代数

以下の問題では Matlab/Octave を用いて答えよ。また、学籍番号の一番最後の桁の数を  $a$  とする。

例えば, 12B56789 ならば  $a = 9$  とする。

1.  $A \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$  と  $e \in \mathbb{R}^3$  を以下のように定義する。

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & a \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad e = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

- (a)  $A$  のべき乗のうち  $A^2, A^3, A^{10}, A^{100}$  を求めよ。  
(b)  $x = (A^{100})^{-1}e$  とするとき, ベクトル  $x$  の第1成分を求めよ。  
(c) 自然数  $n$  に対する  $A^n$  を (a) の結果から推測し, 数学的帰納法により証明せよ。

2.  $3 \times 3$  の対称行列  $B$  を以下のように定義する。

$$B = \begin{pmatrix} 4 \times (a+1) & a+1 & -\sqrt{a+1} \\ a+1 & 4 \times (a+1) & -(a+1) \\ -\sqrt{a+1} & -(a+1) & 4 \times (a+1) \end{pmatrix}$$

- (a)  $B$  の固有値のうち, 負の固有値の数を答えよ。  
(b) Matlab のコマンドで  $[P, D] = \text{eig}(B)$  とすると,  $B$  の固有値を対角成分にもつ対角行列  $D$  と固有ベクトルを列とする行列  $P$  に分解できる。  $PDP^{-1}$  と  $B$  の差を Matlab のノルムで評価せよ。

(c)  $PD^{-1}P^{-1}$  と  $B^{-1}$  の差を Matlab のノルムで評価せよ.

(d) Matlab では, 行列  $X$  について,  $Y = \text{sqrt}(X)$  とすると  $X$  の各成分の平方根を成分に持つ行列  $Y$  が得られる. これを  $Y = \sqrt{X}$  と書くこととする. ここで,  $B^{1/2}$  を  $B^{1/2} = P\sqrt{D}P^{-1}$  で定義したときに,  $(B^{1/2})^2$  と  $B$  の差を Matlab のノルムで評価せよ.

3.  $C = QEQ^{-1}$  と  $b$  を以下のようにして定義する.

$$Q = \begin{pmatrix} \frac{5}{8} & -\frac{\sqrt{3}}{4} & -\frac{3\sqrt{3}}{8} \\ \frac{3\sqrt{3}}{8} & \frac{3}{4} & \frac{1}{8} \\ \frac{\sqrt{3}}{4} & -\frac{1}{2} & \frac{3}{4} \end{pmatrix}, \quad E = \begin{pmatrix} 10^{a+5} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 10^{-a-5} \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

(a) 線形方程式系  $Cx = b$  を  $x$  について解け.

(b)  $Cx$  と  $b$  の差を Matlab のノルムで評価せよ.

(c) 上記の問題 2(b), 2(c), 2(d) と比較して 3(b) で求まった値について何か気が付いたことがあれば, 簡単にその事実とその理由を書け.

4.  $n$  を十分大きな正整数とし, 正方行列  $A$  と  $B$  をそれぞれ `rand(n)`, `magic(n)` というコマンドで生成する. また,  $c \in \mathbb{R}^n$  をゼロでないベクトルとする. 線形方程式系  $Ax = c$  と  $By = c$  を変数  $x$  と  $y$  で解いた際, それぞれにかかった計算時間は異なるか. 解の精度つまり  $Ax$  と  $c$  の差, もしくは  $Bx$  と  $c$  の差についてはどうだろうか. 違いがある場合はその理由などを議論せよ.