

応用線形代数—第3回レポート

東京工業大学 情報理工学院 数理・計算科学系
福田光浩

2017年度 第1クォーター

提出〆切 5月2日(火) 13時まで

レポートボックス1-1 応用線形代数

1. シュミットの正規直交化法を用いて、 $\mathbb{R}^3$ の次の基底を正規直交化せよ。

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{3\sqrt{2}}{2} \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

2. $n \times n$ 次元の実行列からなる集合をベクトル空間と考える. $\mathcal{S}^n := \{\mathbf{S} \in \mathbb{R}^{n \times n} \mid \mathbf{S}^T = \mathbf{S}\}$ を n 次の対称行列の集合とし, $\mathcal{K}^n := \{\mathbf{S} \in \mathbb{R}^{n \times n} \mid \mathbf{S}^T = -\mathbf{S}\}$ を n 次の歪対称行列の集合とする.

- (a) $\mathcal{S}^n$ が部分空間であることを示し, その次元も求めよ. (ヒント: 2次や3次のものを考えれば, 類推ができる).
- (b) $\mathcal{K}^n$ が部分空間であることを示し, その次元も求めよ.
- (c) $\mathcal{S}^n$ と $\mathcal{K}^n$ はお互いに直交する部分空間であることを示せ. ただし, $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ の内積は $\langle \mathbf{A}, \mathbf{B} \rangle = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n A_{ij} B_{ij}$ を用いよ.
- (d) $n \times n$ 次元の実行列のベクトル空間の次元は当然 n^2 である. このことから, $\mathcal{S}^n$ の直交補空間が $\mathcal{K}^n$ であることを配布資料で紹介されている結果を用いて簡単に説明せよ. 完全に証明する必要はない.

3. $\mathbf{a}^1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ と $\mathbf{a}^2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ によって張られる部分空間を X と定義する. $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ の X への直交射影 (をして得られたベクトル) を求めよ.