

定義 6.1 : S を $\mathbb{R}^n$ の部分空間とする. この時, S の次元 r は次の条件を同時に満たす正整数のことである.

- (a) S 内に r 本の線形独立なベクトルの組が存在する.
- (b) S 内の任意の $r + 1$ 本のベクトルの組は線形従属である.

また, $\dim(S) = r$ と表記する.

定義 6.2 : S を次元が r である $\mathbb{R}^n$ の部分空間とする. $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_r \in \mathbb{R}^n$ が S の基底であるためには次の条件を同時に満たす必要がある.

- (a) $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_r \in S$.
- (b) $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_r$ は線形独立である.

さらに, $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_r$ がお互いに直交するとき, すなわち

$$(\mathbf{a}_i)^T \mathbf{a}_j = 0 \quad (i \neq j)$$

のとき, これらのベクトルを S の直交基底と呼ぶ. また, $\|\mathbf{a}_i\| = 1$ ($i = 1, 2, \dots, r$) のとき, これらのベクトルを正規直交基底と呼ぶ.

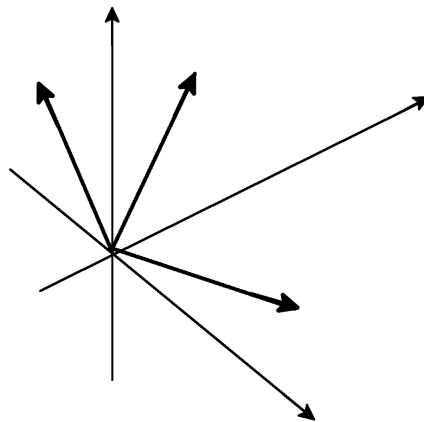


図 15: $\mathbb{R}^3$ における基底の例.

[問題 06-01] 以下の問いに答えよ.

- (i) $\mathbb{R}^n$ から $\mathbb{R}^m$ への写像 T が線形写像であることの定義を述べよ.
- (ii) $\mathbb{R}^n$ の部分集合 S が部分空間であることの定義を述べよ.
- (iii) S を $\mathbb{R}^n$ の部分空間としたとき, その基底および次元の定義を述べよ.
- (iv) S を $\mathbb{R}^n$ の部分空間, T を $\mathbb{R}^n$ から $\mathbb{R}^m$ への線形写像としたとき, S の T による写像 $\{T(\mathbf{x}) \mid \mathbf{x} \in S\}$ は $\mathbb{R}^m$ の部分空間になることを証明せよ.

[問題 06-02] $\mathbb{R}^m$ の部分集合 S が条件

$$\begin{aligned} S &\neq \emptyset, \\ \mathbf{x} \in S, \quad \mathbf{y} \in S &\Rightarrow \mathbf{x} + \mathbf{y} \in S, \\ \mathbf{x} \in S, \quad \alpha \in \mathbb{R} &\Rightarrow \alpha \mathbf{x} \in S, \end{aligned}$$

を満たすとき, S を $\mathbb{R}^m$ の部分空間であるという. S が $\mathbb{R}^n$ の部分空間ならば, 任意の正整数 n に対して,

$$\mathbf{x}_i \in S, \quad \alpha_i \in \mathbb{R} \quad (i = 1, 2, \dots, n) \Rightarrow \sum_{i=1}^n \alpha_i \mathbf{x}_i \in S$$

が成り立つことを帰納法を用いて証明せよ.

[問題 06-03] 部分空間 $\left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 + x_2 + x_3 = 0 \right\}$ の次元および正規直交基底を一つ求めよ.

[問題 06-04] S を $\mathbb{R}^m$ の部分空間, そして $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n \in S$ とする. 以下の (a) と (b) は同値であることを示せ.

(a) $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n$ は線形独立であり, かつ, 任意の $\mathbf{b} \in S$ に対して, $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n, \mathbf{b}$ は線形従属である.

(b) 任意の $\mathbf{b} \in S$ は $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n$ の線形結合として一意的に表現できる.

[問題 06-05] S, T は $\mathbb{R}^n$ の部分空間であるとする. $S \subseteq T$, $\dim(S) = \dim(T)$ のとき, $S = T$ を示せ.

[問題 06-06] $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ としたとき, 集合

$$S = \{\mathbf{A}^T \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n \mid \mathbf{y} \in \mathbb{R}^m\} \quad (\text{行列 } \mathbf{A} \text{ の行空間とよぶ})$$

は部分空間となることを示せ.

[問題 06-07] $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ としたとき, 集合

$$T = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{0}\} \quad (\text{行列 } \mathbf{A} \text{ の核とよぶ})$$

は部分空間となることを示せ.

[問題 06-08] $X \subseteq \mathbb{R}^n$ に対して, 集合 $\{\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n \mid \mathbf{y}^T \mathbf{x} = 0, \quad \forall \mathbf{x} \in X\}$ は部分空間になることを示せ.

定義 6.3 : S を $\mathbb{R}^n$ の部分空間とする.

$$S^\perp := \{\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n \mid \mathbf{y}^T \mathbf{x} = 0, \quad \forall \mathbf{x} \in S\}$$

を部分空間 S の直交補空間とよぶ.

定義 6.4 : $X \subseteq \mathbb{R}^n$ に対して, X を含む (集合の包含関係に関して) 最小の部分空間を X の張る空間とよび, $\text{span}(X)$ と書く.

定理 6.5 : $X \subseteq \mathbb{R}^n$, $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_r \in X$ は線形独立であり, かつ任意の $\mathbf{b} \in X$ に対して $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_r, \mathbf{b}$ は線形従属であると仮定する. この時,

$$(a) \text{span}(X) = \bigcap_{X \subseteq S \subseteq \mathbb{R}^n \text{ かつ } S \text{ は部分空間}} S$$

$$(b) \text{span}(X) = \left\{ \sum_{i=1}^r \lambda_i \mathbf{a}_i \mid \lambda_i \in \mathbb{R} \ (i = 1, 2, \dots, r) \right\}$$

[問題 06-09] Ω を $\mathbb{R}^m$ の部分空間の集まりとする. すなわち, Ω の任意の元 S は $\mathbb{R}^m$ の部分空間である. ただし, $\mathbb{R}^m$ の全ての部分空間が Ω の元であるとは限らない. このとき, $\bigcap_{S \in \Omega} S$ は $\mathbb{R}^m$ の部分空間になることを証明せよ.

[問題 06-10] $X \subseteq \mathbb{R}^n$ とする.

(i) $\text{span}(X)$ の定義を書け.

(ii) Ω を X を含む全ての $\mathbb{R}^m$ の部分空間の集まりとする. $\text{span}(X) = \bigcap_{S \in \Omega} S$ を証明せよ.

(iii) $X = \{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_m\}$ のとき, $\text{span}(X) = \left\{ \sum_{i=1}^m \lambda_i \mathbf{a}_i \mid \lambda_i \in \mathbb{R} \ (i = 1, 2, \dots, m) \right\}$ を証明せよ.

定理 6.6 : $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n \in \mathbb{R}^m$, $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$ に対して, 線形方程式系

$$\sum_{i=1}^n \mathbf{a}_i x_i = \mathbf{b}$$

が解をもつための必要十分条件は

$$\text{span}\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n\} \ni \mathbf{b}.$$

である.

[問題 06-11] 次の命題を証明せよ. $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n \in \mathbb{R}^m$, $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$ に対して, 線形方程式系

$$\sum_{i=1}^n \mathbf{a}_i x_i = \mathbf{b}$$

が解をもつための必要十分条件は

$$\text{span}\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n\} \ni \mathbf{b}.$$

である.

7 直交射影

$\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n \in \mathbb{R}^m$ に対して，線形方程式系

$$\sum_{i=1}^n \mathbf{a}_i x_i = \mathbf{b}$$

が解を持たない時には， $\mathbf{b} \notin \text{span}\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n\} := S$ であることを示した．

この場合には， S に含まれるベクトル $\mathbf{c}$ で $\mathbf{b}$ を最も良く近似することが考えられる．すなわち，誤差 $\|\mathbf{b} - \mathbf{c}\|$ を最小にする $\mathbf{c} \in S$ を求める問題が考えられる．よって $\mathbf{c} \in S$ であるので，線形方程式系

$$\sum_{i=1}^n \mathbf{a}_i x_i = \mathbf{c}$$

は解を持つことになる． $\mathbf{c}$ を $\mathbf{b}$ の S 上の直交射影とよぶ．図 16 を参照．

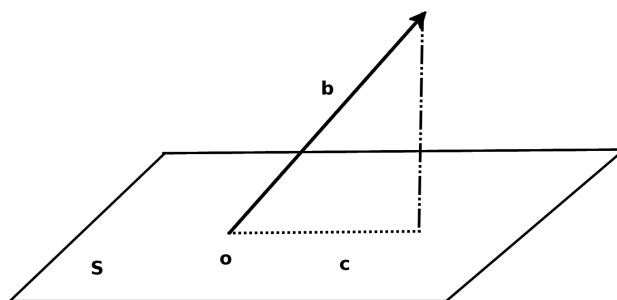


図 16: 線形方程式系が解を持たない場合．

定理 7.1 : $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$, $\mathbf{c} \in S$ のとき，

$$\|\mathbf{b} - \mathbf{a}\| \geq \|\mathbf{b} - \mathbf{c}\| \text{ for } \forall \mathbf{a} \in S \Leftrightarrow \mathbf{a}^T(\mathbf{b} - \mathbf{c}) = 0 \text{ for } \forall \mathbf{a} \in S$$

[問題 07-01] 次の命題を証明せよ． $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$, $\mathbf{c} \in S$ のとき，

$$\|\mathbf{b} - \mathbf{a}\| \geq \|\mathbf{b} - \mathbf{c}\| \text{ for } \forall \mathbf{a} \in S \Leftrightarrow \mathbf{a}^T(\mathbf{b} - \mathbf{c}) = 0 \text{ for } \forall \mathbf{a} \in S$$

定理 7.2 : 直交射影は一意的に定まる．

[問題 07-02] 『直交射影は一意的に定まる．』ことを証明せよ．

7.1 直交射影の計算方法

[問題 07-03] お互いに異なる非ゼロベクトル $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^2$ に対して,

$$S = \{\lambda \mathbf{a} \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$$

とする. $\mathbf{b}$ の S 上の直交射影 $\mathbf{c}$ を $\mathbf{a}$ と $\mathbf{b}$ の内積を使って表現せよ. 図 17 参照.

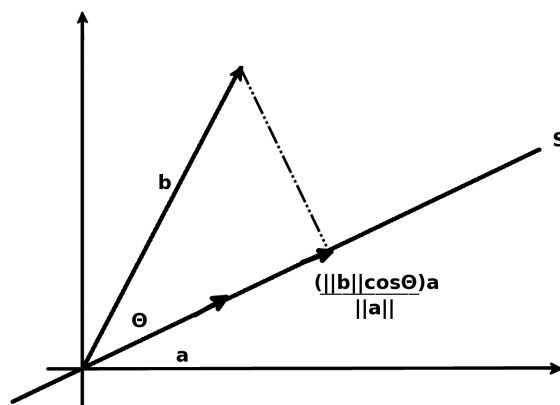


図 17: 直線上への直交射影の例.

一般に

$\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_r$ を部分空間 S の基底
 $\mathbf{A} = (\mathbf{a}_1 \ \mathbf{a}_2 \ \dots \ \mathbf{a}_r)$ を $m \times r$ 行列

とすると

$\text{rank}(\mathbf{A}) = r$ となり $\mathbf{A}^T \mathbf{A} \in \mathbb{R}^{r \times r}$ は正則行列となる.

[問題 07-04] $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times r}$, $\text{rank}(\mathbf{A}) = r$ とする. このとき, $\mathbf{A}^T \mathbf{A}$ は $r \times r$ の正則行列となることを証明せよ.

ここで, $\mathbf{y} = (\mathbf{A}^T \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^T \mathbf{b} \in \mathbb{R}^r$, $\mathbf{c} = \mathbf{A} \mathbf{y}$ とおくと, $\mathbf{c}$ は $\mathbf{b}$ の S 上の直交射影となる. $\mathbf{A} (\mathbf{A}^T \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^T$ を S への (直交) 射影行列とよぶ.

証明: $\mathbf{c} = \mathbf{A} \mathbf{y} = \sum_{i=1}^r \mathbf{a}_i y_i \in S$ である. $\mathbf{a} \in S$ とすると, $\mathbf{a} = \mathbf{A} \mathbf{u}$ となるような $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^r$ が存在する. よって,

$$\begin{aligned} \mathbf{a}^T (\mathbf{b} - \mathbf{c}) &= (\mathbf{A} \mathbf{u})^T (\mathbf{b} - \mathbf{A} (\mathbf{A}^T \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^T \mathbf{b}) \\ &= \mathbf{u}^T \mathbf{A}^T \mathbf{b} - \mathbf{u}^T \mathbf{A}^T \mathbf{A} (\mathbf{A}^T \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^T \mathbf{b} \\ &= \mathbf{0} \end{aligned}$$

ゆえに, 既に表示した定理 7.1 より, $\mathbf{c}$ は $\mathbf{b}$ の S 上への直交射影となる. 特に,

$\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_r$ を S の正規直交基底