応用線形代数—第２回レポート

東京工業大学　情報理工学院　数理・計算科学系
福田光浩

２０１７年度 第１クォーター

提出〆切　４月２７日（木）　１５時まで

レポートボックス１ー１　応用線形代数

1. 以下の等式を示せ.

$$\det \begin{pmatrix} x & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & x & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ & & \vdots & \vdots & & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x & -1 \\ a_0 & a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-1} & a_n \end{pmatrix} = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n$$

2. 以下のように行列 $\boldsymbol{A}$ とベクトル $\boldsymbol{b}$ を定義する.

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 & 3 \\ 3 & 0 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 2 & -1 \\ 5 & 1 & -2 & 3 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ -6 \\ 5 \\ -15 \end{pmatrix}$$

   (a) 線形方程式系 $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$ の解を Gauss の消去法，もしくは Gauss-Jordan の消去法を用いて求めよ.

   (b) 行列 $\boldsymbol{A}$ の行列式を求めよ.

3. 与えられた行列 $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ に対して線形写像 $T_{\boldsymbol{A}} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ を $T_{\boldsymbol{A}}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{Ax}$ と定義する. 以下が同値であることを示せ.

   (a) $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{0}$ の解は自明な解のみである.

(b) $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_1 = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_2$ ならば $\boldsymbol{x}_1 = \boldsymbol{x}_2$ となる．つまり線形方程式系の解は一意であり，線形写像 $T_{\boldsymbol{A}}$ は単射である．

(c) 任意の $\boldsymbol{b}$ に対して $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ となる $\boldsymbol{x}$ が必ず存在する．すなわち線形方程式系 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ は任意の $\boldsymbol{b}$ に対して解けることができ $T_{\boldsymbol{A}}$ は全射である．

(d) $\det\boldsymbol{A} \neq 0$.