3.5 線形方程式系の解の存在について

定理３．１：

(a) 線形方程式系 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ (3) が解をもつ．

$$\Updownarrow$$

$$\mathrm{rank}\,(\boldsymbol{a}_{\cdot 1}\ \boldsymbol{a}_{\cdot 2}\ \ldots\ \boldsymbol{a}_{\cdot n}\ \boldsymbol{b}) = \mathrm{rank}\,(\boldsymbol{a}_{\cdot 1}\ \boldsymbol{a}_{\cdot 2}\ \ldots\ \boldsymbol{a}_{\cdot n}).$$

(b) 線形方程式系 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ (3) が唯一の解をもつ．

$$\Updownarrow$$

$$\mathrm{rank}\,(\boldsymbol{a}_{\cdot 1}\ \boldsymbol{a}_{\cdot 2}\ \ldots\ \boldsymbol{a}_{\cdot n}\ \boldsymbol{b}) = \mathrm{rank}\,(\boldsymbol{a}_{\cdot 1}\ \boldsymbol{a}_{\cdot 2}\ \ldots\ \boldsymbol{a}_{\cdot n}) = n.$$

[問題 03-03] $\boldsymbol{a}_{\cdot 1}, \boldsymbol{a}_{\cdot 2}, \ldots, \boldsymbol{a}_{\cdot n} \in \mathbb{R}^m$ とし，$\boldsymbol{a}_{\cdot 1}, \boldsymbol{a}_{\cdot 2}, \ldots, \boldsymbol{a}_{\cdot r}$ は線形独立，また，任意の $i \geq r+1$ に対して，$\boldsymbol{a}_{\cdot 1}, \boldsymbol{a}_{\cdot 2}, \ldots, \boldsymbol{a}_{\cdot r}, \boldsymbol{a}_{\cdot i}$ は線形従属であると仮定する．この時，線形方程式系 $\displaystyle\sum_{j=1}^{n} \boldsymbol{a}_{\cdot j} x_j = \boldsymbol{b}$ が解をもつための必要十分条件は，線形方程式系 $\displaystyle\sum_{j=1}^{r} \boldsymbol{a}_{\cdot j} x_j = \boldsymbol{b}$ が解をもつことであることを証明せよ．

[問題 03-04] $\boldsymbol{a}_{\cdot 1}, \boldsymbol{a}_{\cdot 2}, \ldots, \boldsymbol{a}_{\cdot r} \in \mathbb{R}^m$ を線形独立と仮定する．このとき，線形方程式系 $\displaystyle\sum_{j=1}^{r} \boldsymbol{a}_{\cdot j} x_j = \boldsymbol{b}$ が解をもつための必要十分条件は

$$\mathrm{rank}\,(\boldsymbol{a}_{\cdot 1}\ \boldsymbol{a}_{\cdot 2}\ \ldots\ \boldsymbol{a}_{\cdot r}\ \boldsymbol{b}) = \mathrm{rank}\,(\boldsymbol{a}_{\cdot 1}\ \boldsymbol{a}_{\cdot 2}\ \ldots\ \boldsymbol{a}_{\cdot r})$$

であることを証明せよ．

[問題 03-05] $\boldsymbol{a}_{\cdot 1}, \boldsymbol{a}_{\cdot 2}, \ldots, \boldsymbol{a}_{\cdot n} \in \mathbb{R}^m$ とする．以下の (a) と (b) を証明せよ．

(a) 線形方程式系 $\displaystyle\sum_{j=1}^{n} \boldsymbol{a}_{\cdot j} x_j = \boldsymbol{b}$ が解をもつ．

$$\Updownarrow$$

$$\mathrm{rank}\,(\boldsymbol{a}_{\cdot 1}\ \boldsymbol{a}_{\cdot 2}\ \ldots\ \boldsymbol{a}_{\cdot n}\ \boldsymbol{b}) = \mathrm{rank}\,(\boldsymbol{a}_{\cdot 1}\ \boldsymbol{a}_{\cdot 2}\ \ldots\ \boldsymbol{a}_{\cdot n}).$$

(b) 線形方程式系 $\displaystyle\sum_{j=1}^{n} \boldsymbol{a}_{\cdot j} x_j = \boldsymbol{b}$ が唯一の解をもつ．

$$\Updownarrow$$

$$\mathrm{rank}\,(\boldsymbol{a}_{\cdot 1}\ \boldsymbol{a}_{\cdot 2}\ \ldots\ \boldsymbol{a}_{\cdot n}\ \boldsymbol{b}) = \mathrm{rank}\,(\boldsymbol{a}_{\cdot 1}\ \boldsymbol{a}_{\cdot 2}\ \ldots\ \boldsymbol{a}_{\cdot n}) = n.$$

[問題 03-06] $\boldsymbol{A} = \left(\boldsymbol{a}^1\ \boldsymbol{a}^2\ \cdots\ \boldsymbol{a}^n\right)$ を $m \times n$ 行列，$\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^m$ とする．ただし，$\boldsymbol{a}^j \in \mathbb{R}^m \quad (j = 1, 2, \ldots, n)$ とする．この時，

(i) 行列 $\boldsymbol{A}$ の階数の定義を述べよ．

(ii) 線形方程式系 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ が解をもつための必要十分条件は『$\boldsymbol{A}$ の階数と $m \times (n+1)$ 行列 $\left(\boldsymbol{a}^1\ \boldsymbol{a}^2\ \cdots \boldsymbol{a}^n\ \boldsymbol{b}\right)$ の階数が一致することである』を証明せよ．

系３．２：$m = n$ の場合，以下の (a)，(b)，(c)，(d)，(e) は全て同値である．

(a) 線形方程式系 (3) は唯一の解をもつ．

(b) $\det \boldsymbol{A} \neq 0$.

(c) $\boldsymbol{A}$ は逆行列をもつ．

(d) $\boldsymbol{a}_{\cdot 1}, \boldsymbol{a}_{\cdot 2}, \ldots, \boldsymbol{a}_{\cdot n}$ は線形独立である．

(e) $\boldsymbol{a}_{1\cdot}, \boldsymbol{a}_{2\cdot}, \ldots, \boldsymbol{a}_{n\cdot}$ は線形独立である．

[問題 03-07] Farkas の補題

$\boldsymbol{a}_i \in \mathbb{R}^m \quad (i = 1, 2, \ldots, n)$，$\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^m$ に対して，以下の２組の等式・不等式について考える．

(a) $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{a}_i x_i = \boldsymbol{b}, \quad x_i \geq 0 \quad (i = 1, 2, \ldots, n),$

(b) $\boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^m, \quad (\boldsymbol{a}_i)^T \boldsymbol{y} \leq 0 \quad (i = 1, 2, \ldots, n), \quad \boldsymbol{b}^T \boldsymbol{y} > 0$

この時，

(a) が解を持つ $\Leftrightarrow$ (b) が解を持たない

が成立する． $m = 2$ の場合について，この命題を図を用いて確かめよ．また，一般の m, n の場合について，この命題の一部『(a) が解をもつ $\Rightarrow$ (b) が解を持たない』を証明せよ．

[問題 03-08] Gordan の定理

上記の [問題 03-07] と同様の考察を次の (a)，(b) に対して行え．

(a) $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{a}_i x_i = \boldsymbol{0}, \quad \boldsymbol{0} \leq \boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)^T \neq \boldsymbol{0},$

(b) $\boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^m, \quad (\boldsymbol{a}_i)^T \boldsymbol{y} > 0 \quad (i = 1, 2, \ldots, n)$

4 行列式

正方行列 $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ の行列式は以下のような計算式で定義される．

$$\det(\boldsymbol{A}) := \sum_{\sigma \in S_n} \mathrm{sign}(\sigma) a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \cdots a_{n\sigma(n)}.$$

ただし，S_n は n 個の要素を置換する写像の集合からなる n 次対称群であり，$\mathrm{sign}(\cdot)$ は置換写像の符号を表す．つまり，

$$\sigma := \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ i_1 & i_2 & \cdots & i_n \end{pmatrix} \in S_n$$

は $\sigma(1) = i_1,\ \sigma(2) = i_2,\ \ldots,\ \sigma(n) = i_n$ を表し，

$$\mathrm{sign}(\sigma) := \begin{cases} \ \ 1, & \sigma\text{が偶置換のとき} \\ -1, & \sigma\text{が奇置換のとき} \end{cases}$$

$\det(\boldsymbol{A})$ を $|\boldsymbol{A}|$ とも表記する．

例：２次元の場合

$\boldsymbol{A} = (\boldsymbol{a}_1\ \boldsymbol{a}_2) \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ とすると，$\boldsymbol{A}$ の行列式の絶対値 $|\det(\boldsymbol{A})|$ は $\boldsymbol{a}_1$ と $\boldsymbol{a}_2$ で作られる平行四辺形の面積となり，行列式の符号は $\boldsymbol{a}_1$ と $\boldsymbol{a}_2$ の位置に関する『向き』を表している（図 13）．

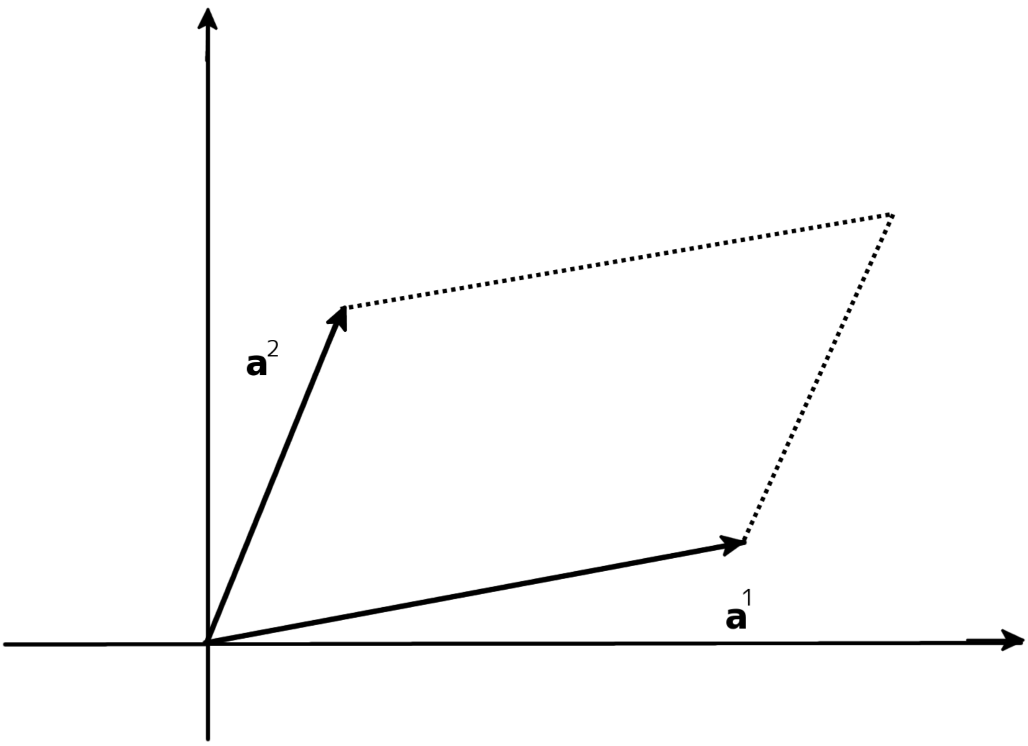

図 13: $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2 \in \mathbb{R}^2$ によって定められた平行四辺形.

[問題 04-01]　$\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2 \in \mathbb{R}^2$，$\boldsymbol{A} = (\boldsymbol{a}_1\ \boldsymbol{a}_2)$ とする．このとき，$\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2$ が作る平行四辺形の面積は $|\det(\boldsymbol{A})|$ に一致することを示せ.

例：３次元の場合

$\boldsymbol{A} = (\boldsymbol{a}_1\ \boldsymbol{a}_2\ \boldsymbol{a}_3) \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ とすると，$\boldsymbol{A}$ の行列式の絶対値 $|\det(\boldsymbol{A})|$ は $\boldsymbol{a}_1$，$\boldsymbol{a}_2$，$\boldsymbol{a}_3$ で作られる平行六面体の体積となり，$\boldsymbol{a}_1$，$\boldsymbol{a}_2$，$\boldsymbol{a}_3$ はそれらの位置に関する『向き』を表している（図 14）．

定理４．１：$\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_n, \boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^n$，$\alpha \in \mathbb{R}$ とすると

(a) $\det(\boldsymbol{a}_1 \ldots \boldsymbol{a}_{i-1}\ \alpha\boldsymbol{a}_i + \boldsymbol{b}\ \boldsymbol{a}_{i+1} \ldots \boldsymbol{a}_n) = \alpha\det(\boldsymbol{A}) + \det(\boldsymbol{a}_1\ \boldsymbol{a}_2 \ldots \boldsymbol{a}_{i-1}\ \boldsymbol{b}\ \boldsymbol{a}_{i+1} \ldots \boldsymbol{a}_n)$;

(b) $\det(\boldsymbol{a}_1 \ldots \boldsymbol{a}_{i-1}\ \boldsymbol{a}_i + \alpha\boldsymbol{a}_j\ \boldsymbol{a}_{i+1} \ldots \boldsymbol{a}_n) = \det(\boldsymbol{A}) \quad (j = 1, 2, \ldots, n,\ j \neq i)$;

(c) $\det(\boldsymbol{a}_1 \ldots \boldsymbol{a}_{i-1}\ \boldsymbol{a}_j\ \boldsymbol{a}_{i+1} \ldots \boldsymbol{a}_{j-1}\ \boldsymbol{a}_i\ \boldsymbol{a}_{j+1} \ldots \boldsymbol{a}_n) = -\det(\boldsymbol{A}) \quad (i, j = 1, 2, \ldots, n \quad i \neq j)$.

これらは列に関する性質であるが，行に関しても同様に成り立つ.

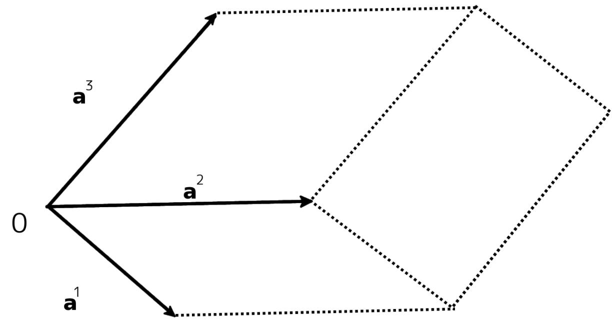

図 14: $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3 \in \mathbb{R}^3$ によって定められた平行六面体.

定理４．２：$\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}, \boldsymbol{C}$ を適当な次元の行列だとすると

$$\det \begin{pmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{B} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{C} \end{pmatrix} = \det(\boldsymbol{A}) \det(\boldsymbol{C})$$

が常に成り立つ．さらに，

$$\det(\boldsymbol{AB}) = \det(\boldsymbol{A}) \det(\boldsymbol{B}) \qquad \det(\boldsymbol{A}^T) = \det(\boldsymbol{A})$$

も成り立つ．

よって，行列式を計算する場合，余因子を用いた展開でも可能であるが，行列の基本変形（ある行/列に定数をかけて異なる行/列に足す）を用いて上（下）三角行列に変形すると計算が容易にできる．

4.1 外積

定義４．３：実数ベクトル空間である $\mathbb{R}^3$ において，以下の（演算）関数 $\cdot \times \cdot : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ を外積と呼ぶ．つまり $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^3$ に対して，

$$\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} := \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} \boldsymbol{e}_1 - \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix} \boldsymbol{e}_2 + \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \boldsymbol{e}_3.$$

ただし，$\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3$ は $\mathbb{R}^3$ の標準基底とする．記号の意味を多少乱暴に使うと，以下のような記憶し易い形になる

$$\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} := \begin{vmatrix} \boldsymbol{e}_1 & \boldsymbol{e}_2 & \boldsymbol{e}_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}.$$

定理４．４：$\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c} \in \mathbb{R}^3$，$\alpha \in \mathbb{R}$ に対して，以下の性質が成り立つ． 1. $\|\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}\| = \|\boldsymbol{a}\|\|\boldsymbol{b}\| \sin\theta$ で θ は $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ がなす角である． 2. $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = -\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{a}$ 3. $(\alpha\boldsymbol{a}) \times \boldsymbol{b} = \boldsymbol{a} \times (\alpha\boldsymbol{b}) = \alpha(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b})$ 4. $\boldsymbol{a} \times (\boldsymbol{b} + \boldsymbol{c}) = \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} + \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{c}$ 5. $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{a} = \boldsymbol{0}$

例： 先程の３次元での例において $\boldsymbol{A} = (\boldsymbol{a}_1\ \boldsymbol{a}_2\ \boldsymbol{a}_3) \in \mathbb{R}^{3\times3}$ とすると，$\boldsymbol{A}$ の行列式の絶対値 $|\det(\boldsymbol{A})|$ は $\boldsymbol{a}_1$，$\boldsymbol{a}_2$，$\boldsymbol{a}_3$ で作られる平行六面体の体積となっていたが，この体積は $|(\boldsymbol{a}_1 \times \boldsymbol{a}_2)^T\boldsymbol{a}_3|$ として外積と内積を用いても計算できる．

5　線形方程式系の解法，逆行列と行列式の計算

線形方程式系を解くには Cramer の公式などがあるが，ここではより計算効率のよい Gauss-Jordan と Gauss の消去法を用いる．

5.1　Gauss-Jordan の消去法

例：

$$\begin{array}{rcrcl} 2x_1 & + & x_2 & = & 4 \qquad (1) \\ x_1 & + & 2x_2 & = & 5 \qquad (2) \end{array} \qquad \left(\begin{array}{ccc|cc} 2 & 1 & 4 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 5 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

上記の行列の左側が単位行列になるように基本演算を施す．

$(1) \times \frac{1}{2}$ として (3) とおく．
$(2) - (1) \times \frac{1}{2}$ として (4) とおく．

$$\begin{array}{rcrcl} x_1 & + & \frac{1}{2}x_2 & = & 2 \qquad (3) \\ & & \frac{3}{2}x_2 & = & 3 \qquad (4) \end{array} \qquad \left(\begin{array}{ccc|cc} 1 & \frac{1}{2} & 2 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{3}{2} & 3 & -\frac{1}{2} & 1 \end{array}\right)$$

$(4) \times \frac{2}{3}$ として (6) とおく．
$(3) - (4) \times \frac{1}{3}$ として (5) とおく．

$$\begin{array}{rcl} x_1 & = & 1 \qquad (5) \\ x_2 & = & 2 \qquad (6) \end{array} \qquad \left(\begin{array}{ccc|cc} 1 & 0 & 1 & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & 1 & 2 & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{array}\right)$$

解は $(x_1, x_2) = (1, 2)$ となる．

これらの計算で加減算は合計で７回，乗算は 16 回，除算は４回行ったことになる．

以上の計算により，$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ に対して定理４．１より，

$$\frac{1}{2} \times \frac{2}{3} \det(\boldsymbol{A}) = \det(\boldsymbol{I}) = 1$$