応用線形代数—第１回レポート

東京工業大学　情報理工学院　数理・計算科学系
福田光浩

２０１６年度 第１クォーター

提出〆切　４月２０日（木）　１５時まで

レポートボックス１ー１　応用線形代数

1. 実数を係数とする変数 x の多項式全体の集合 $\mathbb{R}[x]$ は通常の和と実数とのスカラー積でベクトル空間になることを定義に沿って示せ．(多項式全体の集合 $\mathbb{R}[x]$ には任意の次数の多項式が含まれていることに注意すること）．

2. 次の $\mathbb{R}^3$ の部分集合は部分空間になるか答えよ．ならない場合はその理由を書け．
   (a) $\left\{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3 \mid x_3 = 0\right\}$
   (b) $\left\{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 x_2 = 0\right\}$
   (c) $\left\{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 = 2x_2 = 3x_3\right\}$

3. $\|\cdot\|$ を $\mathbb{R}^n$ の任意のノルムとする．このノルムに対応する双対ノルムを $\|\boldsymbol{x}\|_* := \sup_{\|\boldsymbol{y}\|=1} |\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{y}|$ と定義したとき，$\|\cdot\|_*$ も $\mathbb{R}^n$ のノルムであることを定義に沿って示せ．

4. V, W をベクトル空間，$T : V \to W$ を線形写像とする．$\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n \in V$ とするとき，以下のことを示せ．
   (a) $T(\boldsymbol{v}_1), T(\boldsymbol{v}_2), \ldots, T(\boldsymbol{v}_n)$ が線形独立であれば $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n$ も線形独立である．
   (b) T が単射写像であり，$\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n$ が線形独立であれば $T(\boldsymbol{v}_1), T(\boldsymbol{v}_2), \ldots, T(\boldsymbol{v}_n)$ も線形独立である．