2.1　ベクトル空間

定義２．１： ある集合 V が実ベクトル空間であるためには，その集合にて以下の条件を満たすベクトル和とベクトルのスカラー (実数）積が定義されていなければならない．

ベクトル和

$\forall \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c} \in V$,

(i) $\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} = \boldsymbol{b} + \boldsymbol{a}$ （交換則）

(ii) $(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}) + \boldsymbol{c} = \boldsymbol{a} + (\boldsymbol{b} + \boldsymbol{c})$ （結合則）

(iii) $\boldsymbol{a} + \boldsymbol{0} = \boldsymbol{a}$ となる零ベクトル $\boldsymbol{0} \in V$ が存在する． （零ベクトルの存在）

(iv) $\boldsymbol{a} + \bar{\boldsymbol{a}} = \boldsymbol{0}$ となる逆元 $\bar{\boldsymbol{a}} \in V$ が存在する． （逆元の存在）

スカラー (実数）積

$\forall \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in V$, $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$,

(v) $(\alpha\beta)\boldsymbol{a} = \alpha(\beta\boldsymbol{a})$ （スカラー積の結合則）

(vi) $(\alpha + \beta)\boldsymbol{a} = \alpha\boldsymbol{a} + \beta\boldsymbol{a}$ （スカラーの分配則）

(vii) $\alpha(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}) = \alpha\boldsymbol{a} + \alpha\boldsymbol{b}$ （ベクトルの分配則）

(viii) $1\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}$ （$\mathbb{R}$ の単位元 1 とのスカラー積）

例：$\mathbb{R}^n$, $\mathbb{R}^{n\times m}$, $\mathbb{R}[x]$, $f(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$, $\mathcal{C}[0,1]$ など．

定義２．２： ベクトル空間 V の任意のベクトル $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_k$ とスカラー $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k \in \mathbb{R}$ を用いて新たに定義するベクトル $\displaystyle\sum_{i=1}^{k} \alpha_i \boldsymbol{a}_i$ をベクトル$\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_k$ の線形結合（もしくは一次結合）と呼ぶ．

よって，$\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_k$ の線形結合はそのベクトル空間に属する．

2.2　部分空間

定義２．３： ベクトル空間 V の空でない部分集合 W が，V における和とスカラー積の演算によってベクトル空間になるとき，W を V の(ベクトル）部分空間という．

定理２．４： ベクトル空間 V の空でない部分集合 W が部分空間であるための必要十分条件は

(i) $W \neq \emptyset$

(ii) $\forall \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in W \Rightarrow \boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} \in W$

(iii) $\forall \boldsymbol{a} \in W,\ \forall \alpha \in \mathbb{R} \Rightarrow \alpha\boldsymbol{a} \in W$.

例：ベクトル空間 $\mathbb{R}^n$ に対して $\{0\} \times \mathbb{R}^{n-1}$,（原点を通る）超平面など．

2.3 ベクトルの線形独立性と線形従属性

定義２．５： $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_k \in V$ が線形従属（もしくは一次従属）であるとは少なくとも 1 つ要素が 0 でない $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k \in \mathbb{R}$ が存在し，$\displaystyle\sum_{i=1}^{k} \alpha_i \boldsymbol{a}_i = \boldsymbol{0}$ が成立することをいう．

定義２．６： $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_k \in V$ が線形独立（もしくは一次独立）であるとは $\displaystyle\sum_{i=1}^{k} \alpha_i \boldsymbol{a}_i = \boldsymbol{0}$ を満たす $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$ がすべて 0 であることをいう．

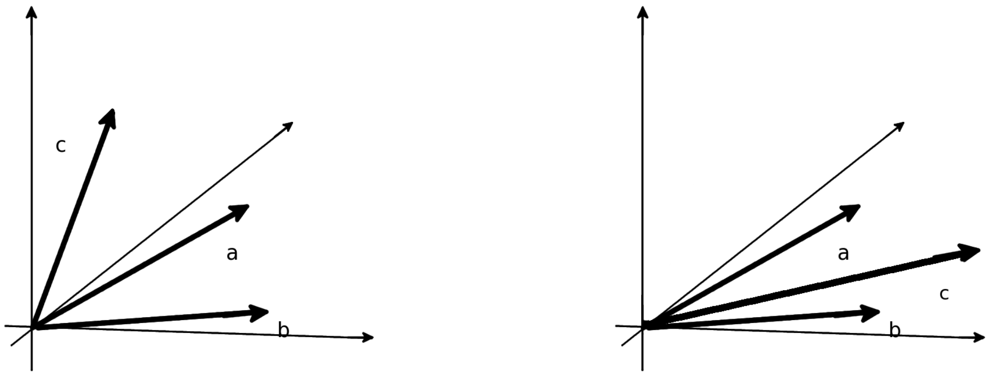

図 4: 3 次元空間における線形独立なベクトル（左）と線形従属なベクトル（右）．

[問題 02-01] 以下の命題を証明せよ．

$$\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_m \in \mathbb{R}^n \text{ が線形従属である}$$
$$\Updownarrow$$
$$\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_m \text{ の少なくとも 1 つが残りの } m-1 \text{ 個のベクトルの線形結合として表される．}$$

2.4 ノルム

一般的にノルムの定義は次のようになる．

定義２．７： 実数ベクトル空間 V において，実関数 $\|\cdot\| : V \to \mathbb{R}$ が定められていて次の性質を満たす時，この関数をノルムと呼ぶ．

$\forall \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in V, \forall \alpha \in \mathbb{R},$

(i) $\|\boldsymbol{a}\| \geq 0$

(ii) $\|\boldsymbol{a}\| = 0$ である必要十分条件は $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{0}$

(ii) $\|\alpha \boldsymbol{a}\| = |\alpha| \|\boldsymbol{a}\|$

(iv) $\|\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}\| \leq \|\boldsymbol{a}\| + \|\boldsymbol{b}\|$.

[問題 02-02] $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_m \in \mathbb{R}^n$ とする．

(i) $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_m$ が線形独立であることの定義を述べよ．

(ii) $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_m$ が条件

$$\|\boldsymbol{a}_i\| \neq 0 \quad (i = 1, 2, \ldots, m) \text{ および } (\boldsymbol{a}_i)^T \boldsymbol{a}_j = 0 \ (i \neq j)$$

を満たせば，$\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_m$ は線形独立であることを，(i) の線形独立の定義に基づいて示せ．

2.4.1 ベクトルノルム

一般的に，$\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ が与えられたとき，このベクトルに対するノルムを $\|\boldsymbol{x}\| = \sqrt{\boldsymbol{x}^T \boldsymbol{x}}$ 以外にも定義することができる．それらの代表的なものに次のものがある．

$$\begin{aligned}
\|\boldsymbol{x}\|_1 &:= \sum_{i=1}^{n} |x_i|, && \text{（1-ノルム）} \\
\|\boldsymbol{x}\|_2 &:= \sqrt{\boldsymbol{x}^T \boldsymbol{x}}, && \text{（Euclid ノルム）} \\
\|\boldsymbol{x}\|_\infty &:= \max_{i=1,2,\ldots,n} |x_i|, && \text{（無限大ノルム）} \\
\|\boldsymbol{x}\|_p &:= \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p \right)^{\frac{1}{p}}, \quad (1 \leq p < \infty). && \text{（p-ノルム）}
\end{aligned}$$

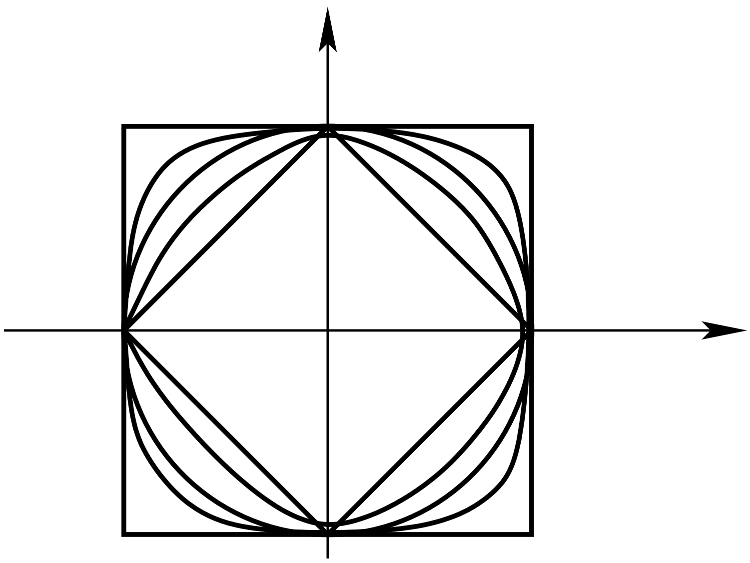

図 5: $\|\boldsymbol{x}\|_p = 1$ となるベクトル（点）を表した図（$1 \leq p \leq \infty$）．

2.4.2 行列ノルム

同様に $m \times n$ 次元実行列 $\boldsymbol{A}$ に対してもノルムを定義できる．

$$
\begin{aligned}
\|\boldsymbol{A}\|_p &:= \left(\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}|a_{ij}|^p\right)^{\frac{1}{p}}, \quad (1 \le p < \infty) \quad \text{（Hölder ノルム）}\\
\|\boldsymbol{A}\|_F &:= \left(\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}^2\right)^{\frac{1}{2}}. \quad \text{（Frobenius もしくは Hilbert-Schmidt ノルム）}
\end{aligned}
$$

2.4.3　誘導された（行列）ノルム

$\mathbb{R}^m$ と $\mathbb{R}^n$ におけるノルムを選択することによって，$m \times n$ 次元実行列 $\boldsymbol{A}$ に対してもノルムを定義できる．

$$
\|\boldsymbol{A}\|_{(m,n)} := \sup_{\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^n,\ \boldsymbol{x}\neq\boldsymbol{0}} \frac{\|\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}\|_{(m)}}{\|\boldsymbol{x}\|_{(n)}} = \max_{\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^n,\ \|\boldsymbol{x}\|_{(n)}=1} \|\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}\|_{(m)}.
$$

この場合，次のような誘導されたノルムが定義できる．

$$
\begin{aligned}
\|\boldsymbol{A}\|_1 &:= \max_{1\le j\le n}\sum_{i=1}^{m}|a_{ij}|, \quad \text{（1-ノルム）}\\
\|\boldsymbol{A}\|_2 &:= \sigma_{\max}(\boldsymbol{A}), \quad \text{（スペクトルノルム）}\\
\|\boldsymbol{A}\|_\infty &:= \max_{1\le i\le m}\sum_{j=1}^{n}|a_{ij}|. \quad \text{（無限大ノルム）}
\end{aligned}
$$

ただし，$\sigma_{\max}(\boldsymbol{A})$ は行列 $\boldsymbol{A}$ の最大特異値を表す．$\boldsymbol{A}$ が正方の場合，$\sigma_{\max}(\boldsymbol{A})$ は $\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{A}$ の最大固有値の平方根を表す．

例：
$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ に対して，$\|\boldsymbol{A}\|_F = 3$，$\|\boldsymbol{A}\|_1 = 4$，$\|\boldsymbol{A}\|_2 \approx 2.9208$，$\|\boldsymbol{A}\|_\infty = 3$.

2.5　内積

2 つのベクトル $\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$ と $\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$ の内積は

$$
\boldsymbol{a}^T\boldsymbol{b} = \sum_{i=1}^{n} a_i b_i
$$

として定義される．

一般的にあるベクトル空間 V において定義される内積は次のようになっている．

定義２．８： 実数ベクトル空間 V において,（演算）実関数 $\langle\cdot,\cdot\rangle : V \times V \to \mathbb{R}$ が定められていて次の性質を満たす時，この関数を内積と呼ぶ.

$\forall \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c} \in V$, $\forall \alpha \in \mathbb{R}$,

(i) $\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \rangle = \langle \boldsymbol{b}, \boldsymbol{a} \rangle$

(ii) $\langle \boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}, \boldsymbol{c} \rangle = \langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{c} \rangle + \langle \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c} \rangle$

(iii) $\langle \alpha\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \rangle = \alpha\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \rangle$

(iv) $\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{a} \rangle \geq 0$ さらに $\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{a} \rangle = 0 \Leftrightarrow \boldsymbol{a} = \boldsymbol{0}$.

２次元における例

$$\text{定数ベクトル } \boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \text{ と変数ベクトル } \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

に対して，それらの内積 $\boldsymbol{a}^T\boldsymbol{x} = a_1x_1 + a_2x_2$ について，内積が 0 となる等高線，内積が正となる領域，内積が負となる領域を書くと図 6 のようになる．またこの内積がある定数 c と等しくなる（変数の）集合 $\{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R} \mid \boldsymbol{a}^T\boldsymbol{x} = a_1x_1 + a_2x_2 = c\}$ は常に直線になることに注意せよ.

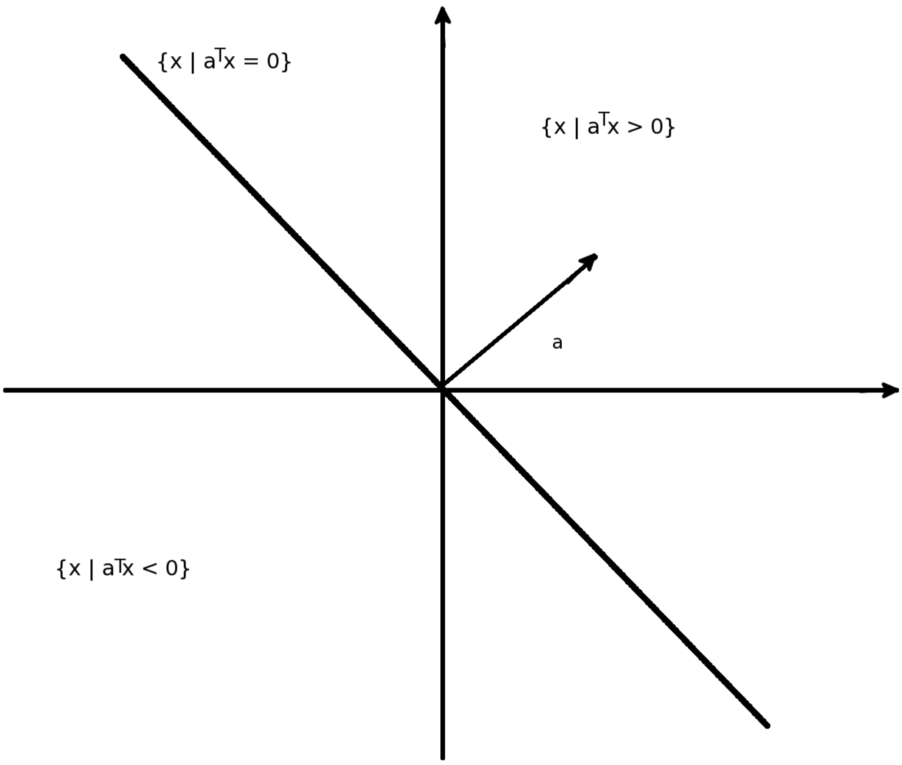

図 6: 内積 $\boldsymbol{a}^T\boldsymbol{x}$ によって定義される領域.

$\boldsymbol{a}, \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^2$ の内積 $\boldsymbol{a}^T\boldsymbol{x}$ は $\|\boldsymbol{a}\|\|\boldsymbol{x}\|\cos\theta$ と一致する．ただし $\|\boldsymbol{a}\|, \|\boldsymbol{x}\|$ はベクトル $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{x}$ の長さ（ノルム）であり，θ はベクトル $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{x}$ がなす角度である（図 7 参照）.

今後，特に断らない限り，ノルムは上記で定義された内積から定義されたノルムのことを意味する．つまり，$\|\boldsymbol{a}\| := \sqrt{\boldsymbol{a}^T\boldsymbol{a}}$ である.