定理９．１：$\mathbb{R}^n$ の２つの部分空間 S と T が独立であるとき，つまり $S \cap T = \{\mathbf{0}\}$ であるとき，

(a) $\forall \boldsymbol{z} \in S \oplus T$ は $\boldsymbol{z} = \boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}$，$\boldsymbol{x} \in S$，$\boldsymbol{y} \in T$ として一意的に表現できる．

(b) $\dim(S \oplus T) = \dim(S) + \dim(T)$.

[問題 09-02] S と T を $\mathbb{R}^n$ の２つの独立な部分空間とする（つまり $S \cap T = \{\mathbf{0}\}$）．このとき，以下の (a) と (b) を説明せよ．

(a) $\forall z \in S \oplus T$ は $\boldsymbol{z} = \boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}$，$\boldsymbol{x} \in S$，$\boldsymbol{y} \in T$ として一意的に表現できる．

(b) $\dim(S \oplus T) = \dim(S) + \dim(T)$.

また S と T が独立でない場合は (a) と (b) が成立しない例を示せ．

定理９．２（次元の公式）：S, T を $\mathbb{R}^n$ の部分空間とすると以下が成り立つ．

$$\dim(S + T) = \dim(S) + \dim(T) - \dim(S \cap T).$$

定理９．３：S を $\mathbb{R}^n$ の p 次元部分空間，T を $\mathbb{R}^n$ の q 次元部分空間，$T \subseteq S$ とする．このとき，条件

$$S = T \oplus U$$

を満たす $p - q$ 次元部分空間 U が存在する（直和分解，直交してなくてもよい）．

[問題 09-03] S を $\mathbb{R}^n$ の p 次元部分空間，T を $\mathbb{R}^n$ の q 次元部分空間，$T \subseteq S$ とする．このとき，条件

$$S = T \oplus U$$

を満たす $p - q$ 次元部分空間 U が存在する．
（ヒント：S と U は直交してなくてもよい.）

定理９．４：$S \subseteq \mathbb{R}^n$ を p 次元部分空間，$S^\perp$ をその直交補空間とすると

$$\mathbb{R}^n = S \oplus S^\perp. \text{（直交分解）}$$

証明：S の正規直交基底を $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_p$ とする．S は $\mathbb{R}^n$ の部分空間であるので，$\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_p$ は $\mathbb{R}^n$ の基底でもあり，さらに $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_p, \boldsymbol{a}_{p+1}, \ldots, \boldsymbol{a}_n$ が $\mathbb{R}^n$ の基底となるように $\boldsymbol{a}_{p+1}, \boldsymbol{a}_{p+2}, \ldots, \boldsymbol{a}_n$ をとることができる．$\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_p, \boldsymbol{a}_{p+1}, \ldots, \boldsymbol{a}_n$ にシュミットの正規直交化法を施すと，$\mathbb{R}^n$ の正規直交基底 $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_p, \boldsymbol{a}'_{p+1}, \ldots, \boldsymbol{a}'_n$ が得られる．よって $S = \mathrm{span}(\{\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_p\})$，
$S^\perp \supseteq \mathrm{span}(\{\boldsymbol{a}'_{p+1}, \boldsymbol{a}'_{p+2}, \ldots, \boldsymbol{a}'_n\})$ である．しかし，$\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_p, \boldsymbol{a}'_{p+1}, \ldots, \boldsymbol{a}'_n$ が $\mathbb{R}^n$ の基底であるので，もし $S^\perp$ が真に $\mathrm{span}(\{\boldsymbol{a}'_{p+1}, \boldsymbol{a}'_{p+2}, \ldots, \boldsymbol{a}'_n\})$ を含むとしたら $S^\perp \cap S = \{\mathbf{0}\}$ でなくなるので，結局 $S^\perp = \mathrm{span}(\{\boldsymbol{a}'_{p+1}, \boldsymbol{a}'_{p+2}, \ldots, \boldsymbol{a}'_n\})$ となる． □

系９．５：S を $\mathbb{R}^n$ の部分空間であるとしたとき，つまり，

$$\dim(S) + \dim(S^\perp) = n.$$

[問題 09-04] $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ の核は $\boldsymbol{A}$ の行空間の直交補空間になっていることを示せ．

系９．６：$\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{m\times n}$ とすると，$\mathrm{rank}(\boldsymbol{A}) + \dim(\text{核}) = n$.

[問題 09-05] $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{m\times n}$ とし，問題 09-04 と同様に $\boldsymbol{A}^T$ の核は $\boldsymbol{A}$ の列空間の直交補空間になっていることを示せ.

$\mathbb{R}^n$ の部分空間 S の直交分解を実現するには，S の基底を $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_p$ としたとき，$\boldsymbol{A} = (\boldsymbol{a}_1\ \boldsymbol{a}_2\ \cdots \boldsymbol{a}_p)$ とまずおく．すると

$$S = \{\boldsymbol{Ay} \in \mathbb{R}^n \mid \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^p\} \quad (\boldsymbol{A}\text{ の列空間})$$
$$S^\perp = \{\boldsymbol{z} \in \mathbb{R}^n \mid \boldsymbol{A}^T\boldsymbol{z} = \boldsymbol{0}\} \quad (\boldsymbol{A}^T\text{ の核})$$

と定義しておく.

$\boldsymbol{u} \in \mathbb{R}^n$ を

$$\boldsymbol{u} = \boldsymbol{x} + \boldsymbol{w}, \quad \boldsymbol{x} \in S, \quad \boldsymbol{w} \in S^\perp$$

と表現するには，$\boldsymbol{u}$ の S 上の直交射影を $\boldsymbol{x}$ ととり，$\boldsymbol{w} = \boldsymbol{u} - \boldsymbol{x}$ とすればよい．すなわち，

$$\begin{aligned} \boldsymbol{x} &= \boldsymbol{A}\left(\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{A}\right)^{-1}\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{u}, \\ \boldsymbol{w} &= \boldsymbol{u} - \boldsymbol{x} = \left(\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}\left(\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{A}\right)^{-1}\boldsymbol{A}^T\right)\boldsymbol{u} \end{aligned}$$

である．$\boldsymbol{A}\left(\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{A}\right)^{-1}\boldsymbol{A}^T$ は S への直交射影行列，$\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}\left(\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{A}\right)^{-1}\boldsymbol{A}^T$ は $S^\perp$ への直交射影行列となる.

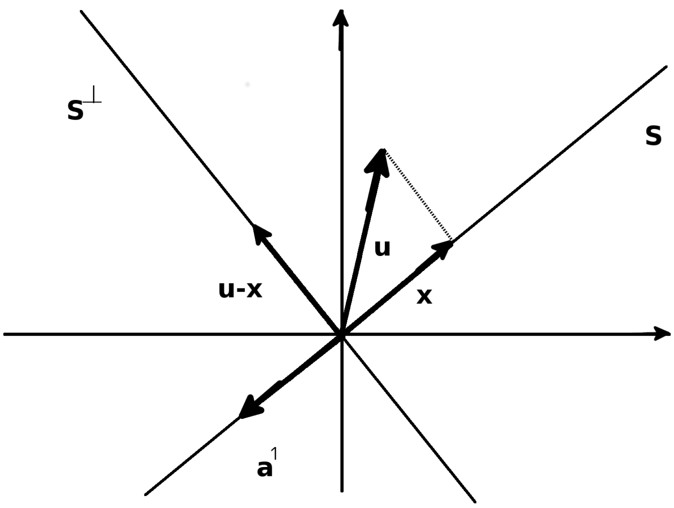

図 20: $\mathbb{R}^2$ を $S = \mathrm{span}(\boldsymbol{a}_1)$ と $S^\perp$ に分解した図．$\boldsymbol{u} \in \mathbb{R}^2$，$\boldsymbol{x} \in S$，$\boldsymbol{u} - \boldsymbol{x} \in S^\perp$ である.

[問題 09-06] S を n 次元 Euclid 空間 $\mathbb{R}^n$ の部分空間，$\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^n$ とする．$\boldsymbol{c} \in S$ が任意の $\boldsymbol{a} \in S$ に対して条件 $\|\boldsymbol{b} - \boldsymbol{a}\| \geq \|\boldsymbol{b} - \boldsymbol{c}\|$ を満たすとき，$\boldsymbol{c} \in S$ を $\boldsymbol{b}$ の S 上への直交射影と呼ぶ.

(a) $\boldsymbol{c} \in S$ が $\boldsymbol{b}$ の S 上への直交射影であるための必要十分条件は，任意の $\boldsymbol{a} \in S$ に対して $(\boldsymbol{b} - \boldsymbol{c})^T(\boldsymbol{a} - \boldsymbol{c}) \leq 0$ が成立することであることを証明せよ.

(b) $\boldsymbol{b}$ の S 上への直交射影は高々 1 つであることを証明せよ.

(c) S の正規直交基底を $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_r$ とする．このとき，$\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_r$ を用いて $\boldsymbol{b}$ の S 上への直交射影を表せ.

[問題 09-07]

(a) n 次元 Euclid 空間 $\mathbb{R}^n$ の部分集合 S が部分空間であることの定義を述べよ.

(b) S を n 次元 Euclid 空間 $\mathbb{R}^n$ の部分空間であるとする．S の次元および基底の定義を述べよ.

(c) V と W を n 次元 Euclid 空間 $\mathbb{R}^n$ の部分空間とし，

$$U = \{\boldsymbol{v} + \boldsymbol{w} \mid \boldsymbol{v} \in V, \quad \boldsymbol{w} \in W\}$$

とする．このとき，U は V と W を含む $\mathbb{R}^n$ の（集合の包含関係の意味で）最小の部分空間となることを示せ.

(d) (c) に加え，$V \cap W = \{\boldsymbol{0}\}$ を仮定する．このとき，$\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_k$ を V の基底，$\boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2, \ldots, \boldsymbol{w}_m$ を W の基底とすると，$\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_k, \boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2, \ldots, \boldsymbol{w}_m$ は U の基底となることを示せ.

10　2 次形式と固有値

10.1　1 変数の場合

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ を 2 階連続微分可能な関数とする.

$$\begin{aligned} x^* \text{ が } f \text{ の極小点} \quad &\Rightarrow \quad f'(x^*) = 0, \quad f''(x^*) \geq 0, \\ x^* \text{ が } f \text{ の極小点} \quad &\Leftarrow \quad f'(x^*) = 0, \quad f''(x^*) > 0, \end{aligned}$$

ただし，ここで x^* が f の極小点とは，この点に対してある $\varepsilon > 0$ が存在し，

$f(x^*) \leq f(x)$ が任意の $x \in \{x' \in \mathbb{R} \mid |x' - x^*| < \varepsilon\}$ に対して成り立つものである.

これらの証明をするためには，f を点 x^* において 2 階まで Taylor 展開をする.

$$f(x) = f(x^*) + f'(x^*)(x - x^*) + \frac{1}{2}f''(x^*)(x - x^*)^2 + o(|x - x^*|^2)$$

ただし，$o(0) = 0, \ \lim_{r \to 0} \frac{o(r)}{r} = 0$ である.

この議論を 2 変数以上の場合において考える．つまり $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ を 2 階連続微分可能な関数とする.

$$\begin{array}{ll} \boldsymbol{f}'(\boldsymbol{x}^*) & \text{は}\, n\, \text{次元のベクトル} \\ \boldsymbol{f}''(\boldsymbol{x}^*) & \text{は}\, n\times n\, \text{対称行列} \end{array}$$

となり，$\frac{1}{2}f''(x^*)(x-x^*)^2$ に相当する部分は $\boldsymbol{x}$ に対する 2 次形式となる．さらに，$f''(x^*) > 0$（$f''(x^*) \geq 0$）という条件は

$$\boldsymbol{f}''(\boldsymbol{x}^*)\ \text{は正定値（半正定値）行列}$$
$$\Updownarrow$$
$$\boldsymbol{f}''(\boldsymbol{x}^*)\ \text{の全ての固有値は正（非負）}$$

となる．

10.2　2 次形式と最小（最大）化問題

<u>[問題 10-01]</u> $\boldsymbol{A} = (a_{ij})$ を 2×2 定数行列とする．関数 $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ を

$$g(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} \quad \text{for} \quad \boldsymbol{x} = (x_1, x_2)^T \in \mathbb{R}^2$$

と定義する．このとき，

(a) $g(\boldsymbol{x})$ を x_1, x_2 で表せ．

(b) 任意の $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^2$ に対して，

$$g(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}^T\left(\frac{\boldsymbol{A}}{2} + \frac{\boldsymbol{A}^T}{2}\right)\boldsymbol{x}$$

が成立することを示せ．行列 $\boldsymbol{Q} = \left(\frac{\boldsymbol{A}}{2} + \frac{\boldsymbol{A}^T}{2}\right)$ は対称行列になる．

ここでは，$\boldsymbol{Q} = (q_{ij})$ を $n\times n$ 定数行列，$\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ に対して，2 次形式

$$g(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}^T\boldsymbol{Q}\boldsymbol{x} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} q_{ij}x_ix_j$$

を扱う．2 次形式を考えるときには，定数行列 $\boldsymbol{Q}$ が対称行列である．すなわち，$\boldsymbol{Q}^T = \boldsymbol{Q}$ であることを仮定しても一般性を失わない（[問題 10-01] を参照）．

例：

n 次元空間 $\mathbb{R}^n$ で関数の最小化を考える．$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ を 2 階連続微分可能な関数とする．すなわち，

$$\frac{\partial^2 f(\boldsymbol{x})}{\partial x_i \partial x_j} \tag{5}$$

が存在して，(5) は変数 $\boldsymbol{x}$ に関して連続（関数）であるとする．点（ベクトル）$\boldsymbol{x}^*$ で Taylor 展開をすると

$$f(\boldsymbol{x}) = f(\boldsymbol{x}^*) + \boldsymbol{\nabla} f(\boldsymbol{x}^*)^T(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}^*) + \frac{1}{2}(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}^*)^T\boldsymbol{H} f(\boldsymbol{x}^*)(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}^*) + o(\|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}^*\|^2) \tag{6}$$

として表現できる．ただし，

$$\boldsymbol{\nabla} f(\boldsymbol{x}^*) = \left.\begin{pmatrix} \frac{\partial f(\boldsymbol{x})}{\partial x_1} \\ \frac{\partial f(\boldsymbol{x})}{\partial x_2} \\ \vdots \\ \frac{\partial f(\boldsymbol{x})}{\partial x_n} \end{pmatrix}\right|_{\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}^*}, \qquad \boldsymbol{H} f(\boldsymbol{x}^*) = \left.\left(\frac{\partial f(\boldsymbol{x})}{\partial x_i \partial x_j}\right)\right|_{\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}^*}.$$