

としてとると, $A^T A = I$ ($r \times r$ 単位行列) となるから, 直交射影は $c = AA^T b$ となる.

例: 直線のあてはめ, 最小二乗法

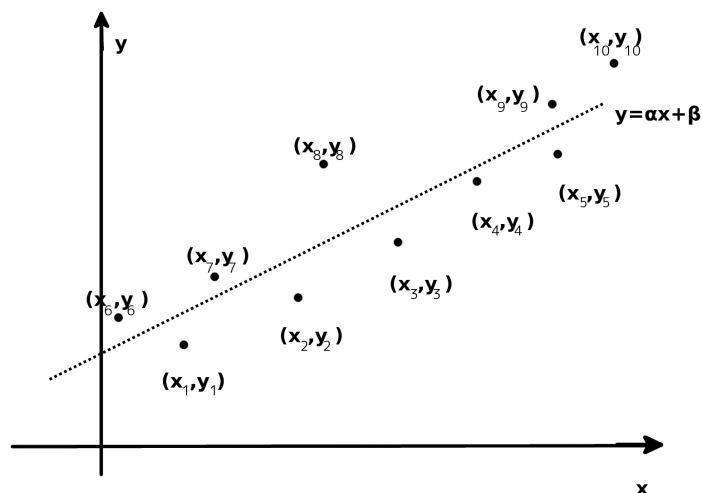


図 18: 直線あてはめの例.

データとして $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_m, y_m) \in \mathbb{R}^2$ が与えられているとする. そして, これらのデータに最もあてはまる直線 $\alpha x_i + \beta = y_i$ ($1 \leq i \leq m$) を求めたい. ここで

$$\begin{aligned} x_i &\rightarrow a_{i1} & i = 1, 2, \dots, m \\ y_i &\rightarrow b_i & i = 1, 2, \dots, m \end{aligned}$$

とすると,

$$\mathbf{a}_1 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}, \mathbf{a}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}, \mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix},$$

に対して, $\mathbf{a}_1 \alpha + \mathbf{a}_2 \beta = \mathbf{b}$ という線形方程式系に書き換えることができる.

仮定: $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2$ は線形独立である.

直交射影の議論を当てはめると, $n = 2$, $S = \{\mathbf{a}_1 \alpha + \mathbf{a}_2 \beta \mid \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$, $\mathbf{A} = (\mathbf{a}_1 \ \mathbf{a}_2)$ となるので,

$$\begin{pmatrix} \hat{\alpha} \\ \hat{\beta} \end{pmatrix} = (\mathbf{A}^T \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^T \mathbf{b}, \quad \mathbf{c} = \mathbf{A} (\mathbf{A}^T \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^T \mathbf{b}$$

を得る.

[問題 07-05] n 次曲線

$$y = \alpha_0 x^n + \alpha_1 x^{n-1} + \dots + \alpha_{n-1} x + \alpha_n$$

のあてはめについても同様な考察をせよ.

8 線形方程式系に関する補足

$\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_q \in \mathbb{R}^m$, $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$ が与えられているとして, 線形方程式系

$$\sum_{j=1}^q \mathbf{a}_j x_j = \mathbf{b} \quad (4)$$

について考える. $S := \text{span}\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_q\}$ とおく.

今までの話を次の4つのケースにまとめることができる.

(a) $\mathbf{b} \in S$ かつ $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_q$ が線形独立の場合. すなわち $\mathbf{b} \in \text{span}\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_q\}$ かつ

$\text{rank}(\mathbf{a}_1 \ \mathbf{a}_2 \ \cdots \ \mathbf{a}_q) = q$ の場合. この場合には, 線形方程式系 (4) は一意的な解をもつ (問題 03-05 や問題 06-04 を参照).

(b) $\mathbf{b} \in S$ かつ $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_q$ が線形従属の場合. すなわち $\mathbf{b} \in \text{span}\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_q\}$ かつ

$\text{rank}(\mathbf{a}_1 \ \mathbf{a}_2 \ \cdots \ \mathbf{a}_q) < q$ の場合. この場合には, 線形方程式系 (4) は解をもつが, 一意的ではない (問題 03-05 を参照). $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_q$ の中から S の基底を選ぶ. 簡単のために, 最初の r 本 $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_r$ が S の基底であると仮定する. この時, 線形方程式系

$$\sum_{j=1}^r \mathbf{a}_j x_j = \mathbf{b}$$

は一意的な解 $(y_1^*, y_2^*, \dots, y_r^*)^T$ を持つ. そして $(y_1^*, y_2^*, \dots, y_r^*, 0, \dots, 0)^T \in \mathbb{R}^q$ は (4) の解の一つとなる.

(c) $\mathbf{b} \notin S$ かつ $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_q$ が線形独立の場合. すなわち $\mathbf{b} \notin \text{span}\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_q\}$ かつ

$\text{rank}(\mathbf{a}_1 \ \mathbf{a}_2 \ \cdots \ \mathbf{a}_q) = q$ の場合. $\mathbf{b} \notin S$ より, (4) は解を持たない. そこで, 誤差 $\left\| \sum_{j=1}^q \mathbf{a}_j x_j - \mathbf{b} \right\|$ を最小にする $\mathbf{x}$ を計算することを考える. $\mathbf{A} = (\mathbf{a}_1 \ \mathbf{a}_2 \ \cdots \ \mathbf{a}_q)$, $\mathbf{c} = \mathbf{A}(\mathbf{A}^T \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^T \mathbf{b}$ とすると, $\mathbf{c}$ は $\mathbf{b}$ の S 上の直交射影となる. このとき, 線形方程式系

$$\sum_{j=1}^q \mathbf{a}_j x_j = \mathbf{c} \quad \text{すなわち} \quad \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{A}(\mathbf{A}^T \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^T \mathbf{b}$$

は一意的な解 $\mathbf{x}^* = (\mathbf{A}^T \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^T \mathbf{b}$ を持ち, その解 $\mathbf{x}^*$ が誤差 $\left\| \sum_{j=1}^q \mathbf{a}_j x_j - \mathbf{b} \right\|$ を最小にする.

(d) $\mathbf{b} \notin S$ かつ $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_q$ が線形従属の場合. すなわち $\mathbf{b} \notin \text{span}\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_q\}$ かつ

$\text{rank}(\mathbf{a}_1 \ \mathbf{a}_2 \ \cdots \ \mathbf{a}_q) < q$ の場合. この場合も $\mathbf{b} \notin S$ より, (4) は解を持たない. そこで, 誤差 $\left\| \sum_{j=1}^q \mathbf{a}_j x_j - \mathbf{b} \right\|$ を最小にする $\mathbf{x}$ を計算することを考える. $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_q$ の中から S の基底を選ぶ. 簡単のために, 最初の r 本 $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_r$ が S の基底であると仮定する. $\bar{\mathbf{A}} = (\mathbf{a}_1 \ \mathbf{a}_2 \ \cdots \ \mathbf{a}_r)$, $\mathbf{c} = \bar{\mathbf{A}}(\bar{\mathbf{A}}^T \bar{\mathbf{A}})^{-1} \bar{\mathbf{A}}^T \mathbf{b}$ とすると, $\mathbf{c}$ は $\mathbf{b}$ の S 上の直交射影となる. このとき, 線形方程式系

$$\sum_{j=1}^r \mathbf{a}_j x_j = \mathbf{c} \quad \text{すなわち} \quad \bar{\mathbf{A}}\mathbf{y} = \bar{\mathbf{A}}(\bar{\mathbf{A}}^T \bar{\mathbf{A}})^{-1} \bar{\mathbf{A}}^T \mathbf{b}$$

は一意的な解 $\mathbf{y}^* = (\bar{\mathbf{A}}^T \bar{\mathbf{A}})^{-1} \bar{\mathbf{A}}^T \mathbf{b} \in \mathbb{R}^r$ を持つ。しかし，線形方程式系

$$\sum_{j=1}^q \mathbf{a}_j x_j = \mathbf{c}$$

の解は一意的ではない。したがって，誤差 $\left\| \sum_{j=1}^q \mathbf{a}_j x_j - \mathbf{b} \right\|$ を最小にする $\mathbf{x}$ は一意的ではないが， $\mathbf{x}^* = (y_1^*, y_2^*, \dots, y_r^*, 0, \dots, 0)^T \in \mathbb{R}^q$ はその解の一つである。

注意： $\mathbf{b} \notin S$ の S への直交射影 $\mathbf{c}$ は一意的に定まるが， $\mathbf{c}$ を $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_q$ の線形結合で表すのが一意的に定まらないということである。

9 部分空間の演算（直和）

$\mathbb{R}^n$ の 2 つの部分空間 S と T に対して，次の演算

$$S + T := \{\mathbf{x} + \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n \mid \mathbf{x} \in S, \mathbf{y} \in T\}$$

を定義する。また， S と T が条件

$$S \cap T = \{\mathbf{0}\}$$

を満たすとき，これらの部分空間は独立であるという。つまりこの場合， $S + T$ を S と T の直和といい， $S \oplus T$ で表す（直交していなくても良い）。図 19 参照。

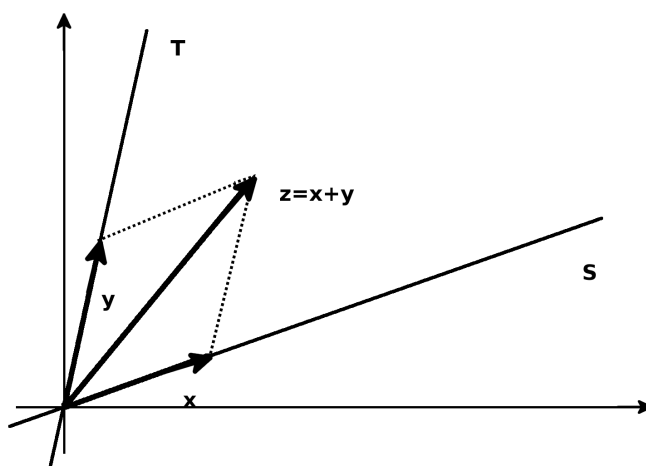


図 19: 部分空間 S と T の直和： $\mathbb{R}^2 = S \oplus T$.

[問題 09-01] $\mathbb{R}^n$ の 2 つの部分空間 S と T に対して， $S + T$ および $S \cap T$ は部分空間になることを証明せよ。