となるので，$\det(\boldsymbol{A}) = 3$ となる．

また，

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{y}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ の解 } \boldsymbol{y}_1 = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{y}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ の解 } \boldsymbol{y}_2 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

から $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{y}_1\ \boldsymbol{y}_2) = \boldsymbol{I}$ となるので，$\boldsymbol{A}^{-1} = (\boldsymbol{y}_1\ \boldsymbol{y}_2) = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$ であり，上記の右辺の行列には線形方程式系の係数行列の逆行列が求まるようになっている．

5.2 Gauss の消去法

今度はより一般的に $n \times n$ 次元の正則行列 $\boldsymbol{A}$ と $\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^n$ に対して，線形方程式系 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ について考える．

• 行に関する基本演算を行うことは（その線形方程式系に）左側から正則行列をかけることに相当する．

• 行に関する基本変形によって $(\boldsymbol{A}\ \boldsymbol{b})$ から $(\boldsymbol{B}\ \boldsymbol{c})$ が得られたとすると，ある $n \times n$ 次元の正則行列 $\boldsymbol{P}$ が存在して，

$$\boldsymbol{P}(\boldsymbol{A}\ \boldsymbol{b}) = (\boldsymbol{B}\ \boldsymbol{c})$$

となる．ゆえに，線形方程式系 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ は $\boldsymbol{B}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{c}$ と同値となる．

Gauss-Jordan の消去法では，$\boldsymbol{B} = \boldsymbol{I}$ となるように基本変形を行った．この時には $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{c}$ となる．

Gauss の消去法では $\boldsymbol{B}$ が<u>上三角行列</u>になるようにする:

$$\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ 0 & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & b_{nn} \end{pmatrix}.$$

この時，

$$\boxed{\begin{aligned} x_n &= \frac{c_n}{b_{nn}} \\ x_i &= \frac{c_i - \sum_{j=i+1}^{n} b_{ij}x_j}{b_{ii}} \quad (i = n-1, n-2, \ldots, 1) \end{aligned}}$$

のように方程式を解くことを<u>後退代入</u>を行うという．

$\boxed{\text{例：}}$ 先程と同じ例で考える．

$$\begin{array}{rcrcll} 2x_1 & + & x_2 & = & 4 & (1) \\ x_1 & + & 2x_2 & = & 5 & (2) \end{array} \qquad \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 5 \end{pmatrix}$$

上記の行列の左側が上三角行列になるように<u>基本演算</u>を施す．

$(2) - (1) \times \frac{1}{2}$ として (4) とおく．

$$\begin{array}{rcrcll} 2x_1 & + & x_2 & = & 4 & (3) \\ & & \frac{3}{2}x_2 & = & 3 & (4) \end{array} \qquad \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 0 & \frac{3}{2} & 3 \end{pmatrix}$$

ここから後退代入を逐次行う.

$$
\begin{aligned}
x_2 &= \frac{3}{\frac{3}{2}} = 2 \\
x_1 &= \frac{4 - x_2}{2} = \frac{4-2}{2} = 1
\end{aligned}
$$

解は $(x_1, x_2) = (1, 2)$ となる.
これらの計算で加減算は合計で 3 回，乗算は 3 回，除算は 3 回行ったことになる.
さらに，定理４．１と定理４．３より，$\det(\boldsymbol{A}) = 2 \cdot \frac{3}{2} = 3$ となる.
以上をまとめると，Gauss-Jordan の消去法と Gauss の消去法が問題なく実行できるとすると，四演算は行列の次元 n に対して，表 1 のようになる.

表 1: Gauss-Jordan の消去法および Gauss 消去法の四演算数.

	$\pm$	$\times$	$\div$	$\pm$	$\times$
Gauss-Jordan	$\frac{(n-1)n(n+1)}{2}$	$\frac{n}{2}(n^2+n+2)$	n^2	$n^2(n-1)$	n^3
Gauss	$\frac{n(2n^2+3n-5)}{6}$	$\frac{n(2n^2+3n-5)}{6}$	$\frac{n(n+1)}{2}$		

[問題 05-01] $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$， $\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ に関して，消去法を使って

(a) 線形方程式系 $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$ を解け.

(b) $\det(\boldsymbol{A})$ を計算せよ.

(c) $\boldsymbol{A}$ の逆行列を計算せよ.

[問題 05-02] $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$，$\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^n$ とする．行列の基本変形（または消去演算）を用いて

(a) 線形方程式系 $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$ の解 $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$；

(b) $\boldsymbol{A}$ の逆行列；

(c) $\boldsymbol{A}$ の行列式

を計算する方法について，数値例とともに説明せよ.

5.3 枢軸（pivot）選択

今迄の議論では Gauss-Jordan もしくは Gauss の消去法は常に実行でき，計算機による有限桁制限による計算誤差が起こらないとことを暗に仮定していた.

例：

$$
\begin{aligned}
10^{-17}x_1 + x_2 &= 1 \qquad (1) \\
x_1 - x_2 &= 0 \qquad (2)
\end{aligned}
\qquad
\begin{pmatrix} 10^{-17} & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}
$$

上記のように誤差がある線形方程式系を数値計算ソフトウェア MATLAB を用いて Gauss の消去法を行うと，

$(2)-(1)\times\frac{1}{10^{-17}}$ として (4) とおく．

$$\begin{array}{rcrcrl} 10^{-17}x_1 & + & x_2 & = & 1 & (3) \\ & & -10^{17}x_2 & = & -10^{17} & (4) \end{array} \qquad \begin{pmatrix} 10^{-17} & 1 & 1 \\ 0 & -10^{17} & -10^{17} \end{pmatrix}$$

ここから後退代入を逐次行う．

$$\begin{aligned} x_2 &= \frac{-10^{17}}{-10^{17}} = 1 \\ x_1 &= \frac{1-1}{10^{-17}} = 0 \end{aligned}$$

解は $(x_1, x_2) = (0, 1)$ となる．

このような現象を避けるために枢軸（pivot）選択を行う．例えば，これから計算をする行列の係数の中で一番絶対値が大きいものを見つけ出し（完全枢軸（pivot）選択），行と列を入れ替える．今回は幸い他の係数は ± 1 なので，1 行目と 2 行目を入れると以下のようになる．

$$\begin{array}{rcrcrl} x_1 & - & x_2 & = & 0 & (1') \\ 10^{-17}x_1 & + & x_2 & = & 1 & (2') \end{array} \qquad \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 10^{-17} & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

同様に数値計算ソフトウェア MATLAB を用いて Gauss の消去法を行うと，

$(2')-(1')\times\frac{10^{-17}}{1}$ として $(4')$ とおく．

$$\begin{array}{rcrcrl} x_1 & - & x_2 & = & 0 & (3') \\ & & x_2 & = & 1 & (4') \end{array} \qquad \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

ここから後退代入を逐次行う．

$$\begin{aligned} x_2 &= \frac{1}{1} = 1 \\ x_1 &= \frac{0+1}{1} = 1 \end{aligned}$$

解は $(x_1, x_2) = (1, 1)$ となる．

6 ベクトル空間の次元，基底，直交補空間

ここで扱う n 次元 Euclid 空間 V はすべて $\mathbb{R}^n$ であるとみなす．