Sept. 25, 2017

集合と位相 第二　第1回 Euclid空間　補足
例2.2 (p. 70) の解説

例 2.2 の解説の前にまず準備を行なう（教科書内容の説明も含む）.

命題　$A \subset \mathbb{R}^n$ とする.

1) A の内点は A に属する.

2) A の外点は A に属さない.

3) 任意の点 $x \in \mathbb{R}^n$ は，A の内点であるか，外点であるか，境界点であるかのいずれかであり，いずれかのうちの唯一つである.

4) A に属する点は，A の触点である.

5) $A^\circ \subset A \subset \bar{A}$.

6) $(\bar{A})^c = (A^c)^\circ$.

7) $(A^\circ)^c = \overline{A^c}$.　（これは例 2.2 には必要ないが，6) との対応のために掲げておく）

8) $A^\circ = A \setminus \partial A$.

9) $\partial A = \bar{A} \setminus A^\circ$.

10) $\bar{A} = A^\circ \cup \partial A = A \cup \partial A$.

証明. 1) $x \in U(x, \varepsilon)$ と内点の定義から明らか.
2) $x \in U(x, \varepsilon)$ と外点の定義から明らか.
3) 前半は境界点の定義から明らか．後半については，まず 1) と 2) より内点であることと外点であることは両立しない．内点と外点がそれぞれ境界点と両立しないことは，境界点の定義から明らか.
4) $x \in U(x, \varepsilon)$ と触点の定義から明らか.
5) 1) と 4) より明らか.
6) $x \in (\bar{A})^c \Leftrightarrow x \notin \bar{A} \Leftrightarrow \neg[\forall \varepsilon > 0;\ U(x, \varepsilon) \cap A \neq \emptyset] \Leftrightarrow \exists \varepsilon > 0$ s.t. $U(x, \varepsilon) \cap A = \emptyset$ $\Leftrightarrow \exists \varepsilon > 0$ s.t. $U(x, \varepsilon) \subset A^c \Leftrightarrow x$ は A^c の内点 $\Leftrightarrow x \in (A^c)^\circ$.
7) 6) の A に A^c を代入して，両辺の補集合を取ればよい.
8) $x \in A^\circ$ とすると，x は A の内点だから，1) より $x \in A$ であり，3) より $x \notin \partial A$ なので，$x \in A \setminus \partial A$．よって $A^\circ \subset A \setminus \partial A$．一方，$x \in A \setminus \partial A$ とすると，$x \in A$ と 2) より x は A の外点でなく，$x \notin \partial A$ より A の境界点でもないので，3) から A の内点でなければならない．したがって，$A \setminus \partial A \subset A^\circ$.
9) 境界点の定義から $\partial A = (A^\circ)^c \cap [(A^c)^\circ]^c$ なので，6) より $\partial A = [(A^c)^\circ]^c \cap (A^\circ)^c = [(\bar{A})^c]^c \setminus A^\circ = \bar{A} \setminus A^\circ$.
10) 9) と 5) より $A^\circ \cup \partial A = A^\circ \cup (\bar{A} \setminus A^\circ) = \bar{A} \cup A^\circ = \bar{A}$．このことと 5) より $\bar{A} = A^\circ \cup \partial A \subset A \cup \partial A = A \cup (\bar{A} \setminus A^\circ) \subset \bar{A}$.（証明終）

例 2.2 $\overline{U(a,r)} = B(a,r) \triangleq \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x-a\| \leq r\}$ （**閉球** (**体**) (closed ball)），
$B(a,r)^\circ = U(a,r)$,
$\partial U(a,r) = \partial B(a,r) = S(a,r) \triangleq \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x-a\| = r\}$ （球面 (sphere)）.

証明. まず，開球と閉球の定義から $U(a,r) \subset B(a,r)$ であることに注意.
$\|x-a\| < r$ のとき x は $U(a,r)$ の内点であり，$B(a,r)$ の内点でもある（$\because \|x-a\| < r \Leftrightarrow x \in U(a,r)$ と $U(a,r) \subset U(a,r) \subset B(a,r)$ 及び内点の定義より）.
$\|x-a\| > r$ のとき，$0 < \varepsilon \leq \|x-a\| - r$ なる ε に対し，$U(x,\varepsilon) \cap B(a,r) = \emptyset$ だから（もし $x' \in U(x,\varepsilon) \cap B(a,r)$ とすると，$\|x'-x\| < \varepsilon$, $\|x'-a\| \leq r$ なので，$\|x-a\| \leq \|x'-a\| + \|x'-x\| < r+\varepsilon$ となって，ε の定め方に矛盾する），x は $B(a,r)$ の外点．したがって，$U(a,r) \subset B(a,r)$ から $U(a,r)$ の外点でもある.
$\|x-a\| = r$ のとき，任意に $\varepsilon > 0$ を固定し，$U(x,\varepsilon)$ を考える．$x^+ \triangleq x + \frac{\varepsilon}{2r}(x-a)$, $x^- \triangleq x - \frac{\varepsilon}{2r}(x-a)$ とおくと，$\|x^+ - x\| = \|x^- - x\| = \varepsilon/2 < \varepsilon$ なので，$x^+, x^- \in U(x,\varepsilon)$ である．そして，$\|x^+ - a\| = r + \varepsilon/2 > r$ なので $x^+ \notin B(a,r)$．$U(a,r) \subset B(a,r)$ から $x^+ \notin U(a,r)$ でもある．$\|x^- - a\| = r - \varepsilon/2 < r$ なので $x^- \in U(a,r) \subset B(a,r)$. したがって，$x$ は $U(a,r)$ の境界点であり，かつ $B(a,r)$ の境界点である.
以上から，例 2.2 の 2 行目と 3 行目が確認できる（2 行目については $\|x-a\| < r \Leftrightarrow x \in U(a,r)$ に注意）.
1 行目は，3 行目と 10) から

$$\begin{aligned}
\overline{U(a,r)} &= U(a,r) \cup \partial U(a,r) \\
&= \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x-a\| < r\} \cup \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x-a\| = r\} \\
&= \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x-a\| \leq r\} \\
&= B(a,r)
\end{aligned}$$

であることからわかる.
なお，2 行目は，3 行目と 8) を使って

$$\begin{aligned}
B(a,r)^\circ &= B(a,r) \setminus \partial B(a,r) \\
&= \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x-a\| \leq r\} \setminus \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x-a\| = r\} \\
&= \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x-a\| < r\} \\
&= U(a,r)
\end{aligned}$$

としても得られる.