期末試験について

- 日時：8月4日（金）15:05～16:30 (85分)
- 手書きのA4用紙一枚のみ持ち込み可（印刷やコピーは不可）
  - これも採点の対象，試験終了後に回収します
- 本，ノート等の持ち込みは不可
- 座席はこちらで指定
- 試験内容：
  - 資源配分問題，ナップサック問題，巡回セールスマン問題，劣モジュラ関数最大化問題
  - 住宅市場問題，安定結婚問題
  - 証明，アルゴリズムの実行，用語の定義など
- 50点満点，25点未満は不合格

数理経済学
第12回
1対1マッチング（安定結婚問題）

塩浦昭義
東京工業大学 経営工学系 准教授
shioura.a.aa@m.titech.ac.jp

安定結婚問題の定義

- n人の「男性」(労働者)とn人の「女性」(仕事)のマッチング
- 「男性」は「女性」に対する選好順序をもつ
- 「女性」は「男性」に対する選好順序をもつ
- 駆け落ちする男女のペアが生まれない(安定な)マッチングを求めたい

選好リストとよぶ

例

男A:123　　女1:BAC
男B:312　　女2:BAC
男C:132　　女3:CAB

男性Aは女性1，女性2，女性3の順に好き
女性1は男性B，男性A，男性Cの順に好き

割当の例:A－1，B－3，C－2

男性Cは現在のパートナー(女性2)より女性3が好き
女性3は現在のパートナー(男性B)より男性Cが好き

⇒ 男性Cと女性3は駆け落ちする(割当は不安定)

安定マッチング

M:「男性」と「女性」のマッチング
定義: 男女のペア(m, w) は（Mに関する）
ブロッキングペア（駆け落ちペア）(m,w)
⇔ マッチング M において，m の相手 < w，　w の相手 < m
定義:Mは安定マッチング⇔Mにブロッキングペアが存在しない

例

男A:123　　女1:BAC
男B:312　　女2:BAC
男C:132　　女3:CAB

不安定な割当の例: A－2，B－3，C－1

定理　安定マッチングは常に存在

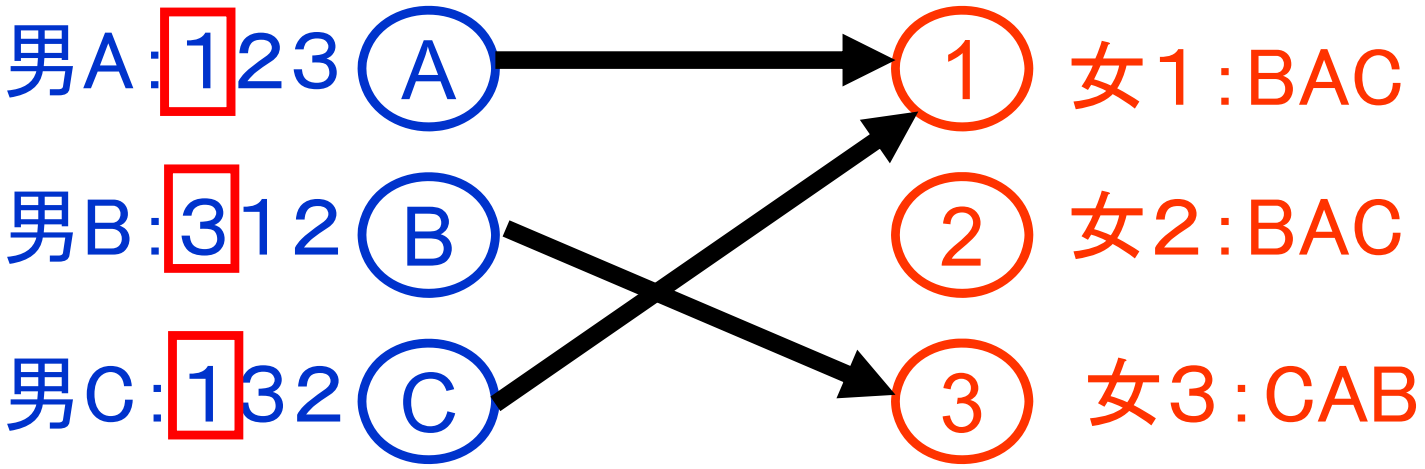
（証明の概略）受入保留(deferred acceptance)アルゴリズムにより，安定マッチングが必ず得られる

受入保留アルゴリズム

提案者の名前を取ってゲイル・シャープレイアルゴリズムとも呼ばれる

- 男性は女性に好みの順にプロポーズ
- 女性はプロポーズしてきた男性の中から最良の男性を仮の相手とする

ステップ1：仮パートナーのいない男性は全員，
残りのパートナー候補のなかで最良の女性にプロポーズ

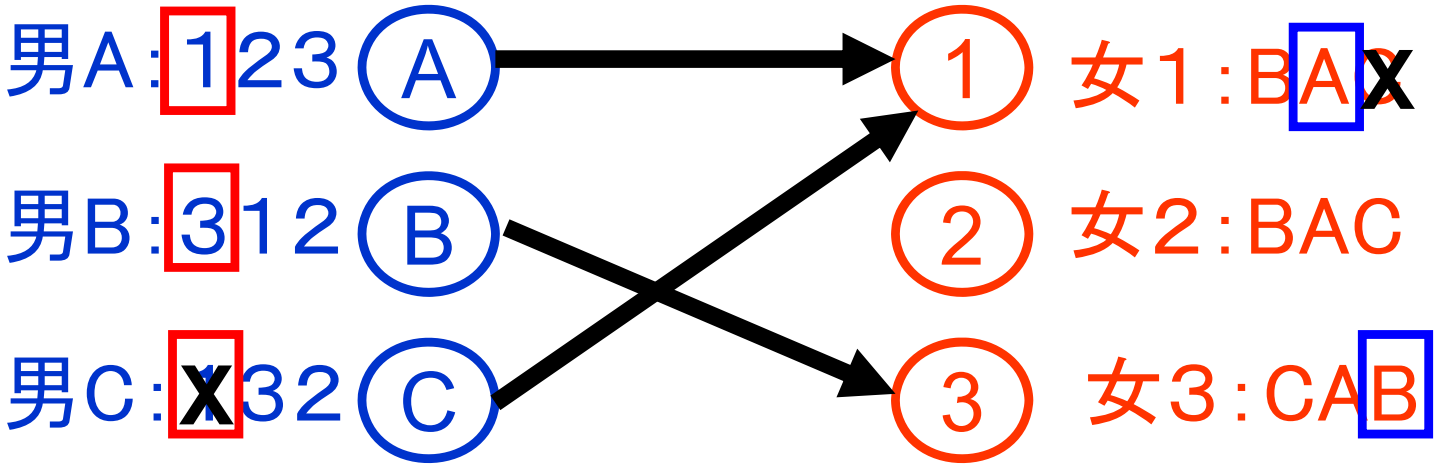


受入保留アルゴリズム

- 男性は女性に好みの順にプロポーズ
- 女性はプロポーズしてきた男性の中から最良の男性を仮の相手とする

ステップ2：プロポーズを受けた女性は全員，
プロポーズしてきた男性（および現在の仮パートナー）の中から最良の男性を（新たな）仮パートナーとする．

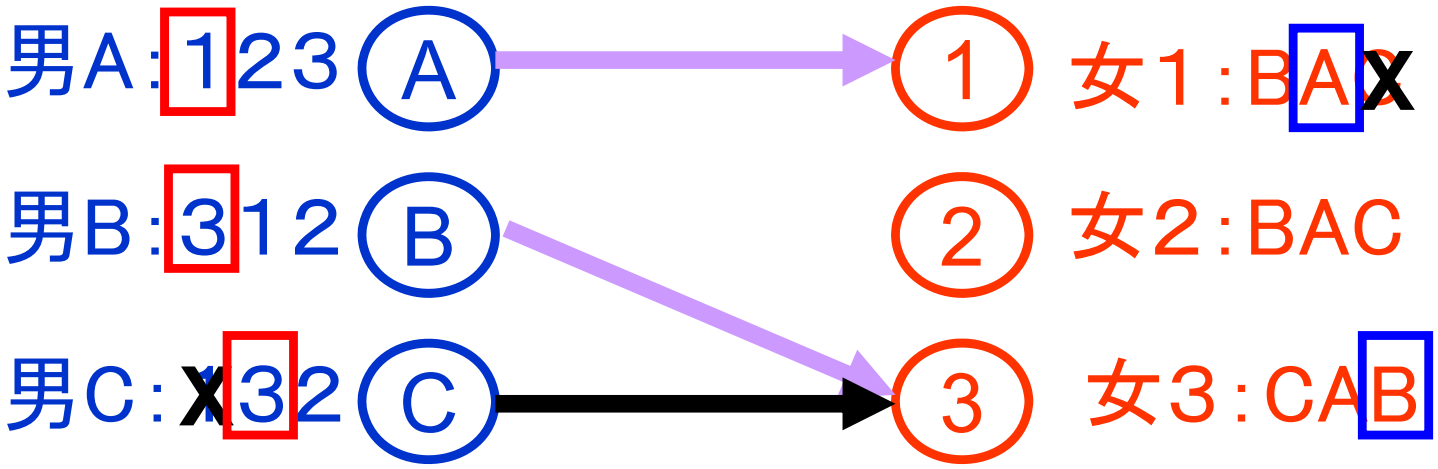
ステップ3：全員に仮パートナーができたら終了．
いない人が存在する場合はステップ1へ．



受入保留アルゴリズム

- 男性は女性に好みの順にプロポーズ
- 女性はプロポーズしてきた男性の中から最良の男性を仮の相手とする

ステップ1：仮パートナーのいない男性は全員，
残りのパートナー候補のなかで最良の女性にプロポーズ

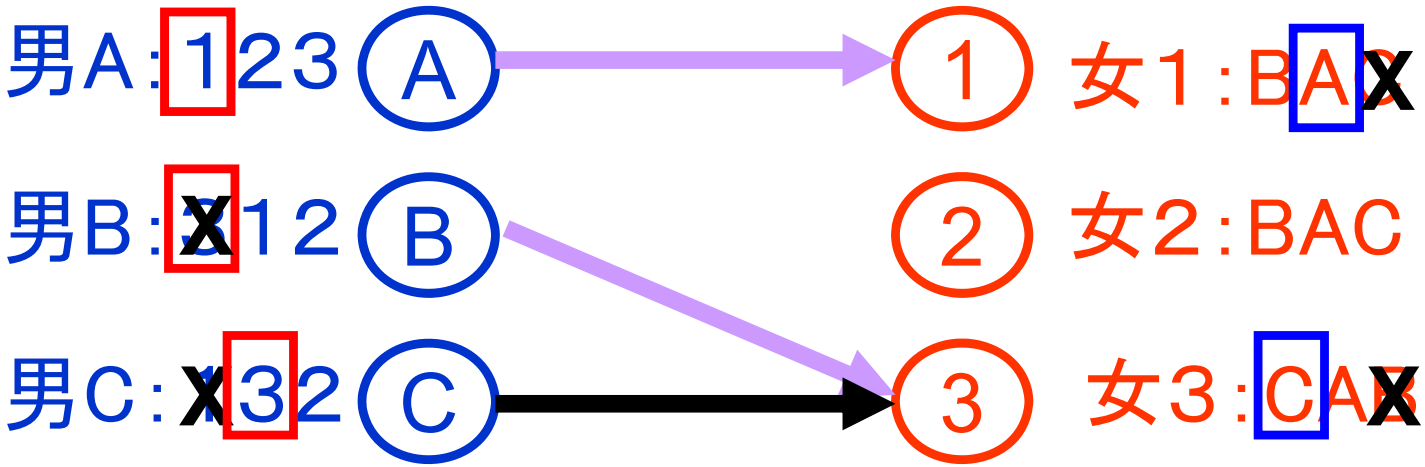


受入保留アルゴリズム

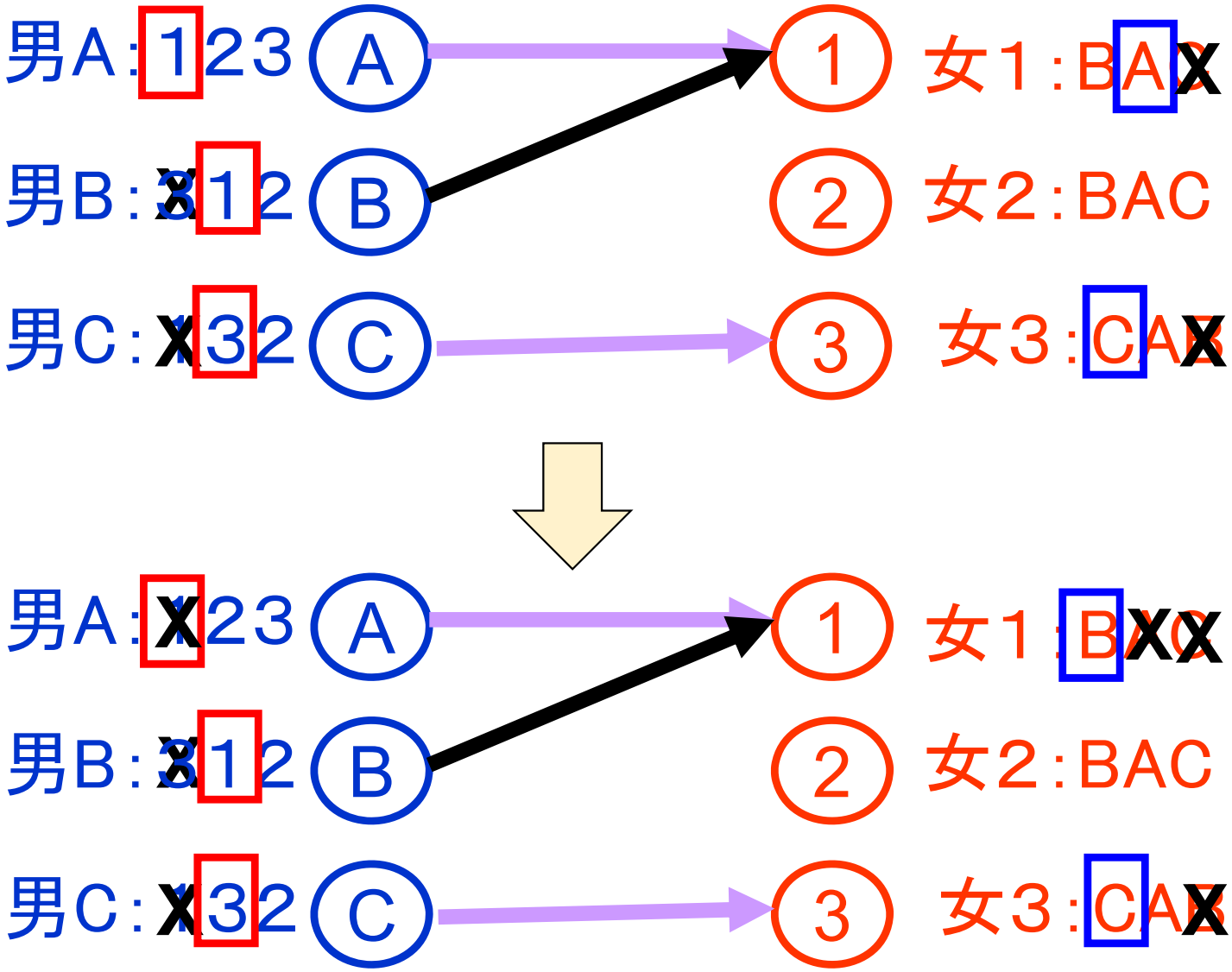
- 男性は女性に好みの順にプロポーズ
- 女性はプロポーズしてきた男性の中から最良の男性を仮の相手とする

ステップ2：プロポーズを受けた女性は全員，
プロポーズしてきた男性（および現在の仮パートナー）の中から最良の男性を（新たな）仮パートナーとする．

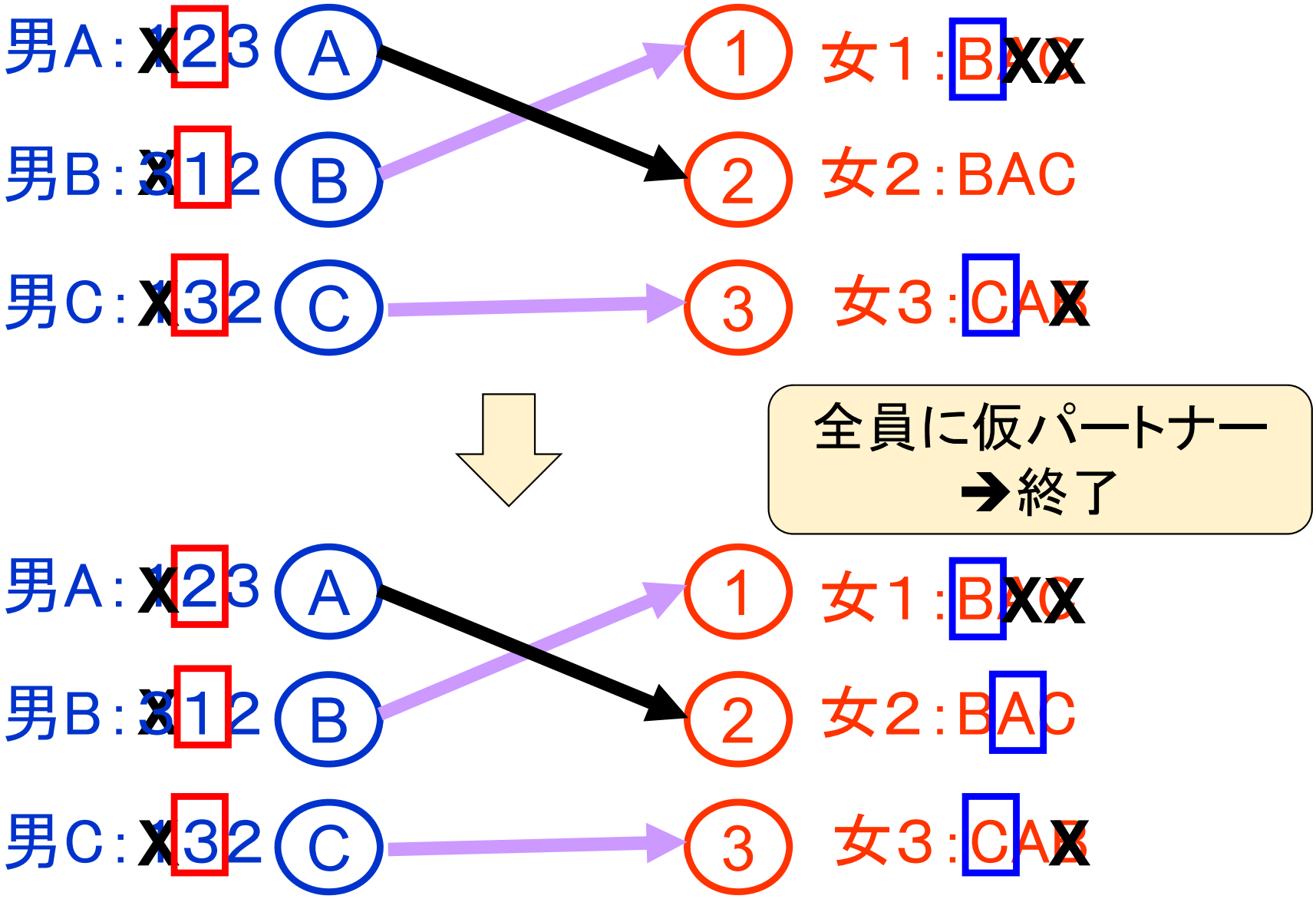
ステップ3：全員に仮パートナーができたら終了．
いない人が存在する場合はステップ1へ．



受入保留アルゴリズム


男A:123
男B:312
男C:132
A
B
C
1
2
3
女1:BAC
女2:BAC
女3:CAB
男A:123
男B:312
男C:132
A
B
C
1
2
3
女1:BAC
女2:BAC
女3:CAB

受入保留アルゴリズム


男A：~~1~~2 3
男B：~~3~~1 2
男C：~~1~~3 2
A
B
C
1
2
3
女1：B ~~A~~ ~~C~~
女2：BAC
女3：C ~~A~~ ~~B~~
全員に仮パートナー
➔終了
男A：~~1~~2 3
男B：~~3~~1 2
男C：~~1~~3 2
A
B
C
1
2
3
女1：B ~~A~~ ~~C~~
女2：BAC
女3：C ~~A~~ ~~B~~

受入保留アルゴリズムの解の安定性

定理 **(a)** 受入保留アルゴリズムは必ず男女全員のマッチングを求める.
(b) さらに，そのマッチングは安定である.

（(a)の証明）

- 各女性は，

一度誰かからプロポーズされたら，以降は常に仮パートナーがいる

- 背理法で証明：アルゴリズム終了時に，
ある男性 m のパートナーがいないと仮定

➔m はすべての女性にプロポーズしているはず
➔すべての女性は仮パートナーがいて，仮パートナーは全て異なる
男女数は等しいので，男性全員にパートナーがいるはず（矛盾）

受入保留アルゴリズムの解の安定性

定理 **(a)** 受入保留アルゴリズムは必ず男女全員のマッチングM を求める.
(b) さらに，そのマッチングMは安定である.

（(b)の証明）

- ブロッキングペアが存在しないことを示せば良い.
  - ブロッキングペア（駆け落ちペア）(m,w)
    マッチング M において，m の相手 < w，w の相手 < m
- 各男性 m は，最も好きな女性から順番にプロポーズ
  ➔拒否されたら2番目，3番目，．．．とプロポーズ

∴ m の最終的なパートナーより好きな女性 w がいたら，
m は w から既に拒否されているはず
➔ wが拒否したときの仮パートナーm’ > m が成立
w には，m’ より好きな男性m”がパートナーとなっているはず
∴m”>m’>m より，ブロッキングペアは存在しない

安定マッチングの最適性

- 安定マッチングは複数存在しうる

男A：123 ——女1：BCA
男B：231 ——女2：CAB
男C：312 ——女3：ABC

男A：123
男B：231
男C：312

女1：BCA
女2：CAB
女3：ABC

- 男性，女性，それぞれにとって最良な安定マッチングが必ず存在

男性最適安定マッチング

定理　次の条件を満たす安定マッチングMが必ず存在する：
任意の安定マッチングM′ および任意の男性 m に対し，
M′ における m のパートナー ≦ M における m のパートナー

女性最適安定マッチング

系　次の条件を満たす安定マッチングMが必ず存在する：
任意の安定マッチングM′ および任意の女性 w に対し，
M′ における w のパートナー ≦ M における w のパートナー

安定マッチングの最適性

- 男性最適安定マッチングは，女性に対して最悪の安定マッチング

定理　男性最適安定マッチングMに対し，以下が成り立つ：
任意の安定マッチングM’ および任意の女性 w に対し，
M’ における w のパートナー ≧ M における w のパートナー

（証明）以下では女性 w を固定して考える.
ある安定マッチングM’が存在して，
M’ における w のパートナーm’ < M における w のパートナーm
と仮定.
マッチングM’において(m,w)は
- ペアになっていない
- w はM’におけるパートナー m’ より m が好き
- m にとって w は（安定マッチングという条件下で）最良の相手
  ➔ m はM’におけるパートナーより w が好き

∴(m,w)はブロッキングペア ➔ M’ は安定マッチングではない（矛盾）

受入保留アルゴリズムの最適性

定理　受入保留アルゴリズムにより得られる
安定マッチングは男性最適である

（証明の概略）
以下を証明すれば良い:
アルゴリズムにおいて，男性 m が女性 w に拒否された
➔ m と w がペアになる安定マッチングは存在しない
（帰納法で証明できる）

つまり，m を受け入れてくれた女性が，「一番良い」パートナー

系　受入保留アルゴリズムにおいて男女の立場を入れ替えたとき，
最終的に得られる安定マッチングは女性最適である

受入保留アルゴリズムの耐戦略性

定理　（男性プロポーズの）受入保留アルゴリズムにおいて，
各男性は，自分一人が嘘をついても，より良いパートナーを得る
ことはできない

（証明は省略）

各女性は，自分一人が嘘をついて，より良いパートナーを得ること
があり得る

男A：1 2 3　　女1：B C A
男B：~~2~~ 3 1　　女2：A C B
男C：2 1 3　　女3：A B C

男A：~~1~~ 2 3　　女1：B C A
男B：~~2~~ 3 1　　女2：A B C
男C：~~2~~ 1 3　　女3：A B C

女2が嘘をつく
➔より良い男
とペアになる

安定結婚問題の拡張

- その１：男女数が異なる場合
- その２：独身を許す（パートナーにしたくない異性を考慮）
- その３：同順位を許す
- その４：１対多マッチング（１つの仕事に複数の労働者を割り当て）

問題の拡張1：男女の人数が異なる

- パートナーのいない男女が出てくる

➔ブロッキングペアの定義を変更する必要性

定義： 男女のペア(m, w) は（マッチングMに関する）

ブロッキングペア（駆け落ちペア） (m,w)

🡐🡒(i) M においてm と w はペアになっていない

(ii) m はM において相手がいない，もしくは相手よりwを好む

(iii) w はM において相手がいない，もしくは相手よりmを好む

定義：Mは安定マッチング🡐🡒Mにブロッキングペアが存在しない

例

男A：12
男B：12
男C：21

女1：CBA
女2：BCA

マッチング A-1, C-2
に対し，(B,1)はブロッキングペア

- Bは相手がいない
- 1はAよりBが好き

問題の拡張1：男女の人数が異なる

男女同数の場合と同様に，下記の結果が得られる

定理 男女の人数が異なる場合でも，受入保留アルゴリズムにより安定マッチングが得られる

定理 (i) 男性が少ない場合，安定マッチングにおいて男性全員が相手をもつ
(ii) 男性が多い場合，どの安定マッチングにおいても，相手をもつ男性のグループは等しい

例

男A：12　女1：CBA
男B：12　女2：BCA
男C：21

男A：12　女1：CBA
男B：12　女2：BCA
男C：21

2種類の安定マッチング．　どちらにおいても男Aはパートナーなし

問題の拡張2：独身を許す

- 「嫌な異性とペアになるより独りがよい」という選択を認める
- つまり，「ペアになっても良い」異性についてのみ順序をつける

男A：123	女1：BAC	マッチング C-1, B-3
男B：231	女2：C	に対し，(A,1)はブロッキングペア
男C：13	女3：AB	• Aは相手がいない
		• 1はCよりAが好き

定義：男女のペア(m, w) は（マッチングMに関する）

ブロッキングペア（駆け落ちペア）(m,w)

⇔(i) M においてm と w はペアでなく，かつペアになっても良い

(ii) m はM において相手がいない，もしくは相手よりwを好む

(iii) w はM において相手がいない，もしくは相手よりmを好む

問題の拡張2：独身を許す

これまでの場合と同様に，下記の結果が得られる

定理 独身を許す場合でも，受入保留アルゴリズムにより
安定マッチングが得られる
（ペアになれない男性は，プロポーズしても直ちに却下）

定理 どの安定マッチングにおいても，
相手をもつ男性のグループ・もたない男性のグループ
相手をもつ女性のグループ・もたない女性のグループ
は等しい

男A：$\boxed{1}$23　　女1：B$\boxed{A}$C
男B：2$\boxed{3}$1　　女2：C
男C：13　　女3：A$\boxed{B}$

男A：12$\boxed{3}$　　女1：$\boxed{B}$AC
男B：23$\boxed{1}$　　女2：C
男C：13　　女3：$\boxed{A}$B

安定結婚問題の拡張

- その１：男女数が異なる場合
- その２：独身を許す（パートナーにしたくない異性を考慮）
- その３：同順位を許す
- その４：１対多マッチング（１つの病院に複数の研修医を割り当て）

研修医マッチング問題の定義

- n人の「研修医」をm箇所の「病院」に割り当てる
- 各病院 i には定員 c_i がある（$c_1 + c_2 + \cdots + c_m \geq n$ を仮定）
- 「研修医」は「病院」に対する選好順序をもつ
- 「病院」は「研修医」に対する選好順序をもつ
- 不満をもつ病院・研修医のペアをもたない

安定な割当を求めたい

研修医A：213
研修医B：213
研修医C：123
研修医D：312

病院1（定員2）：ABCD
病院2（定員1）：CBAD
病院3（定員2）：DABC

割当案

病院1: A
病院2: C
病院3: BD

Bさんは病院3より病院1に行きたい
病院1は定員に空きがある
➔不満が生じる

ブロッキングペアと安定割当

定義: 研修医(resident)と病院(hospital)のペア(r, h) は
（割当 A に関する）ブロッキングペア
🡐🡒 (i) 割当 A において，r は h に割り当てられていない
(ii) 割当 A において，r の割当先の病院 < h
(iii) 割当 A において，h に空きがある
または h に割り当てられた最低順位の研修医 < r

定義: Aは安定割当🡐🡒A にブロッキングペアが存在しない

割当案

病院1: A
病院2: C
病院3: BD

Bさんは病院3より病院1に行きたい
病院1は定員に空きがある
🡒不満が生じる（ブロッキングペア）

安定割当に関する性質

定理　安定割当は常に存在

- 受入保留アルゴリズムの修正版により求めることが可能
- 研修生からプロポーズ➔「研修生最適」な安定割当
- 病院からプロポーズ➔「病院最適」な安定割当

研修医A：2 1 3
研修医B：2 1 3
研修医C：1 2 3
研修医D：3 1 2

病院1（定員2）：A B C D
病院2（定員1）：C B A D
病院3（定員2）：D A B C

「研修生最適」

研修医A：2 1 3
研修医B：2 1 3
研修医C：1 2 3
研修医D：3 1 2

病院1（定員2）：A B C D
病院2（定員1）：C B A D
病院3（定員2）：D A B C

「病院最適」

安定割当に関する性質

“Rural Hospital” Theorem と呼ばれる

定理

(i) 各病院に割り当てられる研修医の人数は，どの安定割当でも等しい

(ii) ある安定割当で病院 h に割り当てられた研修医の人数が定員未満

➔ 病院 h に割り当てられる研修医は，どの安定割当でも等しい

(i)の意味：２つの安定割当 A, A’ および病院 h について

割当 A において病院 h に割り当てられた研修医の人数

＝割当 A’ において病院 h に割り当てられた研修医の人数

(ii)の意味：

割当 A において病院 h に割り当てられた研修医の人数＜定員

かつ，h に割り当てられた研修医が A,B,C

➔割当 A’ においても，病院 h にA,B,Cが割り当てられる

アルゴリズムの実行例：研修医プロポーズ

研修医A：2 1 3
研修医B：3 1 2
研修医C：2 3 1
研修医D：1 3 2

病院1（定員2）：B A D C
病院2（定員1）：D C A B
病院3（定員2）：A D C B

定員1なので，
Aは拒否される

研修医A：~~2~~ 1 3
研修医B：3 1 2
研修医C：2 3 1
研修医D：1 3 2

病院1（定員2）：B A D C
病院2（定員1）：D C ~~A~~ B
病院3（定員2）：A D C B

Aは病院1に
プロポーズ
➔定員以下な
のでOK

アルゴリズムの実行例：病院プロポーズ

研修医A：213
研修医B：312
研修医C：231
研修医D：132

病院1（定員2）：BADC
病院2（定員1）：DCAB
病院3（定員2）：ADCB

各病院は
定員分だけ
プロポーズ

研修医A：21~~3~~
研修医B：312
研修医C：231
研修医D：13~~2~~

病院1（定員2）：BADC
病院2（定員1）：~~D~~CAB
病院3（定員2）：~~A~~DCB

研修医A：21~~3~~
研修医B：312
研修医C：2~~3~~1
研修医D：13~~2~~

病院1（定員2）：BADC
病院2（定員1）：~~D~~CAB
病院3（定員2）：~~A~~D~~C~~B

アルゴリズムの実行例：病院プロポーズ

研修医A：2 1 ~~3~~
研修医B：3 ~~1~~ 2
研修医C：2 ~~3~~ 1
研修医D：1 3 ~~2~~

病院1（定員2）：~~3~~ A D C
病院2（定員1）：~~D~~ C A B
病院3（定員2）：~~A~~ D ~~C~~ B

各病院は
定員分だけ
プロポーズ

研修医A：2 1 ~~3~~
研修医B：3 ~~1~~ 2
研修医C：2 ~~3~~ 1
研修医D：1 ~~3~~ ~~2~~

病院1（定員2）：~~3~~ A D C
病院2（定員1）：~~D~~ C A B
病院3（定員2）：~~A~~ D ~~C~~ B

“Rural Hospital” Theorem より，
安定割当での各病院への割当人数は
常に　2，1，1　となる

演習問題（レポートは今回が最後）

問1：右の安定結婚問題の例に
受入保留アルゴリズムを適用して
安定マッチングを求めよ.
計算過程も書くこと.
（ヒント：各男性のパートナーは
第1または第2希望になる）

男A：2413　女1：BADC
男B：3142　女2：DCAB
男C：2314　女3：ADCB
男D：4132　女4：BADC

問2：右の安定結婚問題の例において，
男女の立場を入れ替えて受入保留アルゴリズムを適用して，
安定マッチングを求めよ.
計算過程も書くこと.
（ヒント：各女性のパートナーは第1または第2希望になる）