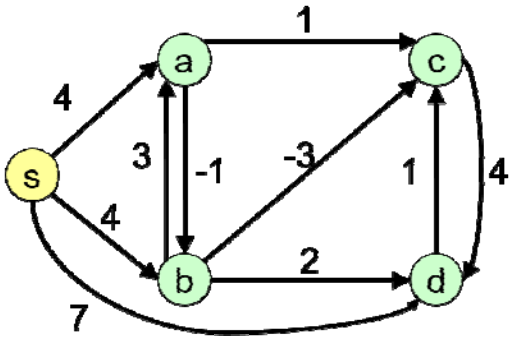
問１

（１）：以下の問いに答えよ．

（１－１）右のグラフにおける，始点 s から各頂点への最短路長を，ベルマン・フォードのアルゴリズムを使って計算せよ．計算の過程として，各$k = 0,1,2,\ldots$に対し，k回目の反復における，各頂点への枝数k以下の最短路長を書けばよい．



コメント：計算間違いに注意．
　　負閉路の有無を確認するために，k = 5 まで続けること．

（１－２）上記の計算結果を基にして，各頂点への最短路が存在する場合は最短路を，負閉路が存在する場合は負閉路を，それぞれ書け．　図を使って書いても良い．

コメント：この問題では最短路が存在するが，答えには最短路を書くのであって，
　　最短路長を書くのではない．

（２）：下記の差分不等式系の解の有無を判定するために，最短路問題に帰着して計算したい．

$$x_b - x_a \leq -1,\ x_a - x_b \leq 3,\ x_c - x_a \leq 1,\ x_b - x_c \leq 2,$$
$$-2 \leq x_c \leq 3,\ x_a \leq 4,\ x_b \geq 5$$

この不等式系に対応するグラフを書け．各枝にはその長さも書くこと．
（解の有無を判定する必要はない）

コメント：a, b, c 以外の頂点を追加する必要あり．その頂点から出入りする枝の向きに注意．

（３）：有向グラフ(V, E) および各枝 (u, v) の長さ $\ell(u, v)$ が与えられているとする．

（３－１）実数$p(v)$ $(v \in V)$ がポテンシャルであることの定義を書け．

コメント：授業スライドに書いてあるとおり．

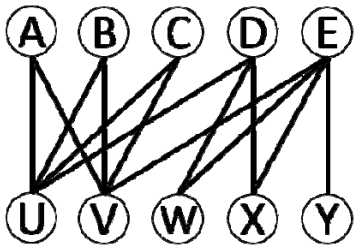
（３－２）この有向グラフに負閉路 C が存在するとき，ポテンシャルは存在しない．
　　このことを，ポテンシャルの定義に基づいて証明せよ．

コメント：授業で説明したとおり．

（４）：あるグラフにおける s から t への最短路を P とする．路 P に沿って s から t へ進むとき，頂点 u を通過するとする．このとき，u から t への P の部分路 Q は，u から t への最短路である．このことを証明せよ．

コメント：ほぼ同じ命題を授業で証明している．

問２



（１）：右の二部グラフについて考える．以下の問いに答えよ．

（１－１）このグラフのマッチング**ではない**枝集合Mを１つ求めよ．
ただし，**枝数はちょうど５**とする．
また，その枝集合がマッチングではない理由を述べよ．

コメント：マッチングの定義が分かれば簡単な問題.

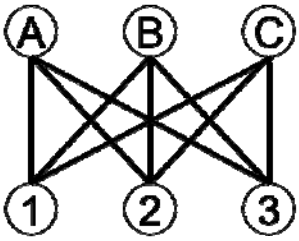
（１－２）このグラフの頂点被覆**ではない**頂点集合Sを１つ求めよ．
ただし，**頂点数はちょうど５**とする．また，その頂点集合が頂点被覆ではない理由を述べよ．

コメント：頂点被覆の定義が分かれば簡単な問題.

（１－３）このグラフの**最大マッチングと最小頂点被覆**を求めよ．結果のみ書けば良い．

コメント：それぞれ，要素数は４になる．

（２）：右の二部グラフ（枝の重みは表の通り）が与えられたとき，重み最大の交互路を用いたアルゴリズムにより，最大重みマッチングを計算せよ．**各反復で用いた交互路および各反復でのマッチングを明記**すること．



$w(i,j)$	A	B	C
①	4	2	1
②	5	4	3
③	3	2	0

コメント：各反復では，マッチングの枝数が０，１，２，３と順に増えていくことに注意.

（３）：（２）で考えた最大重みマッチング問題において， A,B,C は複数財オークションの参加者，①，②，③はオークションにかけられた財，w(i, j)は財 j に対する参加者 i の評価値と見なすことにする．このとき，財の均衡割当は
「A に財①，B に財③，C に財②」という割当になる．このことをふまえて，以下の問いに答えよ．

（３－１）各財の非負の価格 p_1, p_2, p_3 が均衡価格になるための条件を**不等式，等式の形で具体的に**書け.

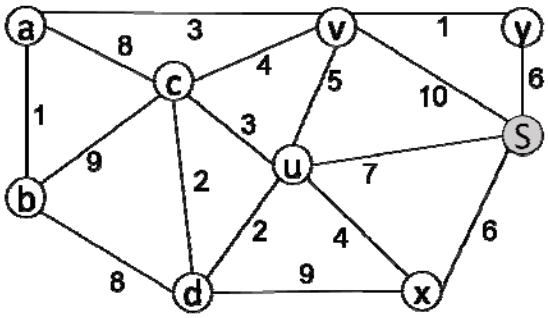
コメント：「各参加者の得る利得は，全ての財から得る利得の中で最大である」，と言う条件に加え，
「各参加者の得る利得は非負である」という条件も必要.
上記の表の数値を使って具体的に不等式条件を書くこと.

（３－２）均衡価格を１つ求めよ．結果のみ書けば良い．

コメント： 以上の条件を満たす解を１つ求めれば良い.

問３

（１）: 右のグラフの最小全域木を，クラスカルのアルゴリズムおよびプリムのアルゴリズムを用いて計算せよ．解答用紙のグラフにおいて，**最小全域木の枝を太線で記入する**と共に，最小全域木の各枝に対して**追加された順番**を書けば良い．プリムのアルゴリズムでは，**頂点 S を根とすること**.



コメント :「追加された順番」を書き忘れている解答が幾つかあった.

（２）: 頂点集合 V，枝集合 E のグラフが与えられたとき，頂点集合の分割 V',V''（頂点集合をV',V'' の二つに分けたもの）を考える．以下の問いに答えよ.

（２－１）V',V'' に関するカットセット$E(V',V'')$の定義を書け.

（２－２）V' に含まれる頂点 u および V'' に含まれる頂点 v に対し，u と v をつなぐ路を P とする．このとき，P がカットセット $E(V',V'')$ の枝を１つ以上含むことを証明せよ.

コメント： 次の(2-3)でこの命題を証明できているのにも関わらず，(2-2)ができていない学生が多い．証明の中身が理解できていない？

（２－３）グラフの任意の閉路 C に対し，C がカットセット $E(V',V'')$ の枝を１つ含むならば，C はカットセット $E(V',V'')$ の枝を２つ以上含むことを証明せよ.
（２－２）で証明した事実を使っても良い.

コメント： (2-2)を使えば簡単.

（３）: 以下の問いに答えよ.

（３－１）グラフが連結であることの定義を書け.

（３－２）グラフの全域木の定義を書け.

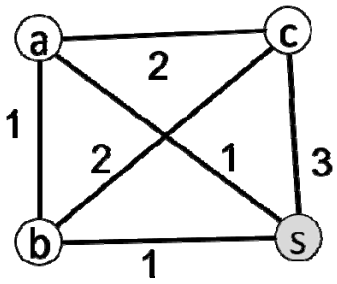
コメント : 全域木であることの必要十分条件を書いたのでは不可.

（３－３）全域木 T から，T に含まれる枝 (u,v)を取り除くと非連結になる.
このことを，（３－１），（３－２）の定義に基づき証明せよ.

コメント： 解答の中で「任意の２頂点間にただ１つの路が存在する」という事実を使う場合は，これを証明する必要がある.

（３－４）全域木 T に含まれない枝 (s,t) を T に追加すると閉路ができる.
このことを，（３－１），（３－２）の定義に基づき証明せよ.

コメント: どのような閉路ができるか, 具体的に考えるとわかりやすい.



（4）: 右のグラフにおける最小全域木ゲームを考える.

ここで s はソース，a，b，c はプレイヤーを表すとする.

（4－1）この最小全域木ゲームにおいて，各プレイヤーa, b, c の費用分担（支払額）を非負変数 p_a, p_b, p_c によってそれぞれ表すとする．(p_a, p_b, p_c) がコアに含まれるための必要十分条件を等式，不等式を用いて具体的に書け．結果のみ書けば良い.

（4－2）この最小全域木ゲームにおける Bird 分担を１つ求めよ．結果のみ書けば良い.

コメント：コアの定義，Bird 分担の定義が分かっていれば簡単な計算問題.