2017 年度 数理経済学 中間試験問題［50 点満点］

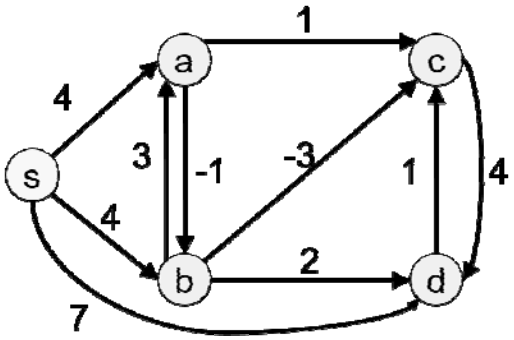
2017 年 7 月 7 日(金)15 時 05 分～16 時 30 分（85 分）

※問題は問 1 から問 3 まである．　それぞれ，解答用紙の表裏を使って解答を書くこと．
※問題冊子の最後の 1 枚は計算用紙である．
※A4 用紙を持ち込んでいる場合には，名前と学籍番号を書いて必ず提出すること．

※証明問題について：証明は文章及び数式を用いて，明確に理解できるように書くこと．
図を補助的に用いても良いが，図に大きく依存した説明は不可とする．

問１

（１）: 以下の問いに答えよ．



（１－１）右のグラフにおける，始点 s から各頂点への最短路長を，ベルマン・フォードのアルゴリズムを使って計算せよ．計算の過程として，各$k = 0,1,2,\ldots$に対し，k回目の反復における，各頂点への枝数k以下の最短路長を書けばよい．

（１－２）上記の計算結果を基にして，各頂点への最短路が存在する場合は最短路を，負閉路が存在する場合は負閉路を，それぞれ書け． 図を使って書いても良い．

（２）: 下記の差分不等式系の解の有無を判定するために，最短路問題に帰着して計算したい．

$$x_b - x_a \le -1,\ x_a - x_b \le 3,\ x_c - x_a \le 1,\ x_b - x_c \le 2,$$
$$-2 \le x_c \le 3,\ x_a \le 4,\ x_b \ge 5$$

この不等式系に対応するグラフを書け．各枝にはその長さも書くこと．

（解の有無を判定する必要はない）

（３）: 有向グラフ(V, E) および各枝 (u, v) の長さ $\ell(u, v)$ が与えられているとする．

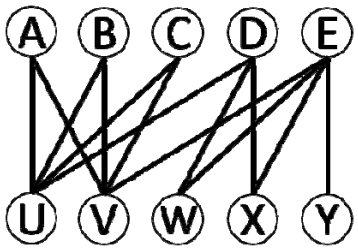
（３－１）実数$p(v)$ $(v \in V)$ がポテンシャルであることの定義を書け．

（３－２）この有向グラフに負閉路 C が存在するとき，ポテンシャルは存在しない．

このことを，ポテンシャルの定義に基づいて証明せよ．

（４）: あるグラフにおける s から t への最短路を P とする．路 P に沿って s から t へ進むとき，頂点 u を通過するとする．このとき，u から t への P の部分路 Q は，u から t への最短路である．このことを証明せよ．

問２



（１）: 右の二部グラフについて考える．以下の問いに答えよ．

（１－１）このグラフのマッチング**ではない**枝集合Mを１つ求めよ．

ただし，**枝数はちょうど 5** とする．

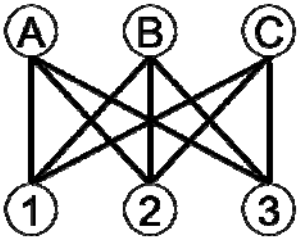
また，その枝集合がマッチングではない理由を述べよ．

（１－２）このグラフの頂点被覆**ではない**頂点集合Sを１つ求めよ．

ただし，**頂点数はちょうど 5** とする．また，その頂点集合が頂点被覆ではない理由を述べよ．

（１－３）このグラフの**最大マッチングと最小頂点被覆**を求めよ．結果のみ書けば良い．

（２）: 右の二部グラフ（枝の重みは表の通り）が与えられたとき，重み最大の交互路を用いたアルゴリズムにより，最大重みマッチングを計算せよ．**各反復で用いた交互路および各反復でのマッチングを明記**すること．



$w(i,j)$	A	B	C
①	4	2	1
②	5	4	3
③	3	2	0

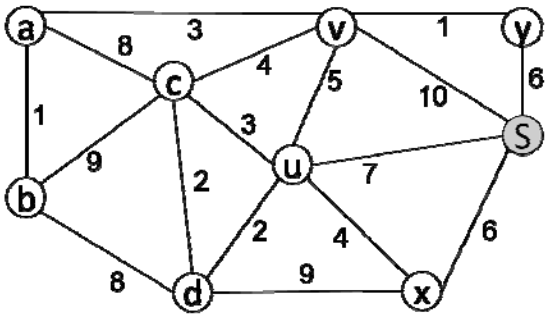
（３）:（２）で考えた最大重みマッチング問題において， A,B,C は複数財オークションの参加者，①，②，③はオークションにかけられた財，w(i, j)は財 j に対する参加者 i の評価値と見なすことにする．このとき，財の均衡割当は「A に財①，B に財③，C に財②」という割当になる．このことをふまえて，以下の問いに答えよ．

（３－１）各財の非負の価格 p_1, p_2, p_3 が均衡価格になるための条件を**不等式，等式の形で具体的に**書け．

（３－２）均衡価格を１つ求めよ．結果のみ書けば良い．

問３

（１）: 右のグラフの最小全域木を，クラスカルのアルゴリズムおよびプリムのアルゴリズムを用いて計算せよ．解答用紙のグラフにおいて，**最小全域木の枝を太線で記入する**と共に，最小全域木の各枝に対して**追加された順番**を書けば良い．プリムのアルゴリズムでは，**頂点 S を根とすること**.



（２）: 頂点集合 V，枝集合 E のグラフが与えられたとき，頂点集合の分割 V', V''（頂点集合をV', V'' の二つに分けたもの）を考える．以下の問いに答えよ．

（２－１）V', V'' に関するカットセット$E(V', V'')$の定義を書け.

（２－２）V' に含まれる頂点 u および V'' に含まれる頂点 v に対し，u と v をつなぐ路を P とする．このとき，P がカットセット $E(V', V'')$ の枝を１つ以上含むことを証明せよ.

（２－３）グラフの任意の閉路 C に対し，C がカットセット $E(V', V'')$ の枝を１つ含むならば，C はカットセット $E(V', V'')$ の枝を２つ以上含むことを証明せよ.
（２－２）で証明した事実を使っても良い.

（３）: 以下の問いに答えよ.

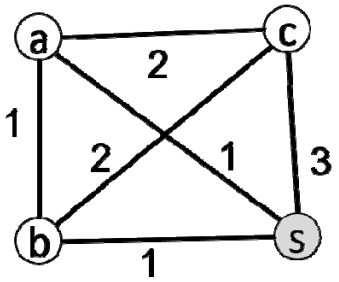
（３－１）グラフが連結であることの定義を書け.

（３－２）グラフの全域木の定義を書け.

（３－３）全域木 T から，T に含まれる枝 (u, v)を取り除くと非連結になる．このことを，（３－１），（３－２）の定義に基づき証明せよ.

（３－４）全域木 T に含まれない枝 (s, t) を T に追加すると閉路ができる．このことを，（３－１），（３－２）の定義に基づき証明せよ.

（４）: 右のグラフにおける最小全域木ゲームを考える．
ここで s はソース，a，b，c はプレイヤーを表すとする.



（４－１）この最小全域木ゲームにおいて，各プレイヤーa, b, c の費用分担（支払額）を非負変数 p_a, p_b, p_c によってそれぞれ表すとする．(p_a, p_b, p_c) がコアに含まれるための必要十分条件を等式，不等式を用いて具体的に書け．結果のみ書けば良い.

（４－２）この最小全域木ゲームにおける Bird 分担を１つ求めよ．結果のみ書けば良い.