数理経済学
第2回
最短路問題

塩浦昭義
東京工業大学 経営工学系 准教授
shioura.a.aa@m.titech.ac.jp

枝長が正の場合の最短路長

各枝の長さが正のときの最短路の性質

- 最短路長≦0となるのは，s から s への最短路のみ
- 任意の v ≠ s に対し，ある頂点 u が存在して，

  s から v への最短路 = s から u への最短路 + (u,v)

  s から v への最短路長 > s から u への最短路長

∴最短路長は，小さい順に計算すると便利

- v_i への最短路長＝i番目に小さい最短路長 とおく

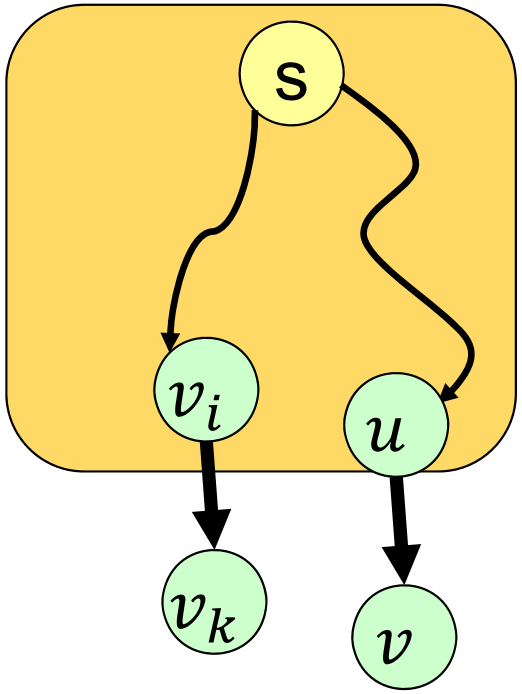
➔ $v_1 = s$

v_k への最短路 = あるi (≦k-1)が存在して，

v_i への最短路+(v_i, v_k)

v_j $(j > k)$への，$\{v_1, \dots v_{k-1}\}$経由の最短路長

≧v_j への（条件なし）最短路長 ≧ v_k への最短路長



ダイクストラのアルゴリズム

手順0: $d(s) = 0, d(v) = +\infty\ (\forall v \neq s)$ とおく. T=V とする.

手順1: T の要素 u で d(u) 最小のものを選ぶ.

T := T − {u} とおく.

手順2: u から出る各枝 (u,v) に対し,

$v \in T$ かつ$d(v) > d(u) + \ell(u, v)$ ならば,

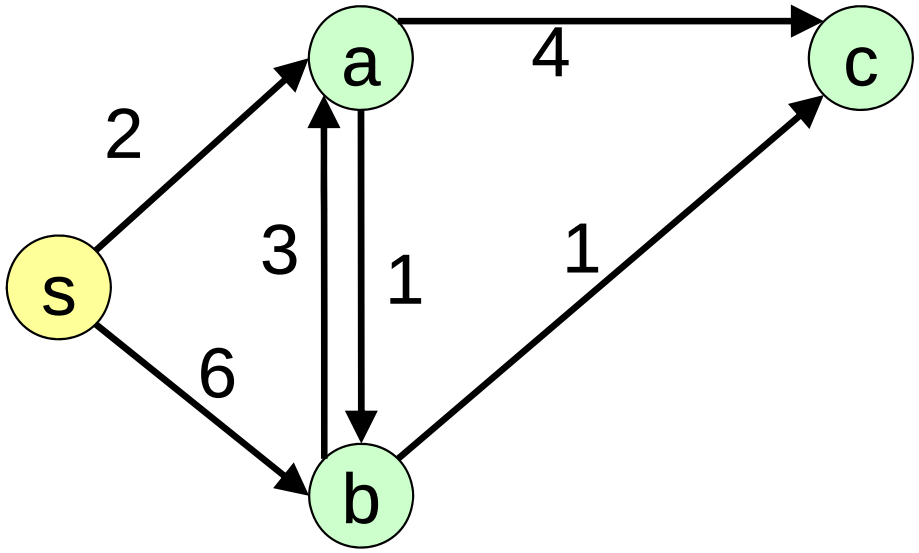
$d(v) \coloneqq d(u) + \ell(u, v)$ とおく.

手順3: $T = \emptyset$ ➔各v に対して d(v) を出力.

$T \neq \emptyset$ ➔ 手順1へ.

最短路長だけでなく，最短路を計算することも
（若干の修正により）可能である

実行例



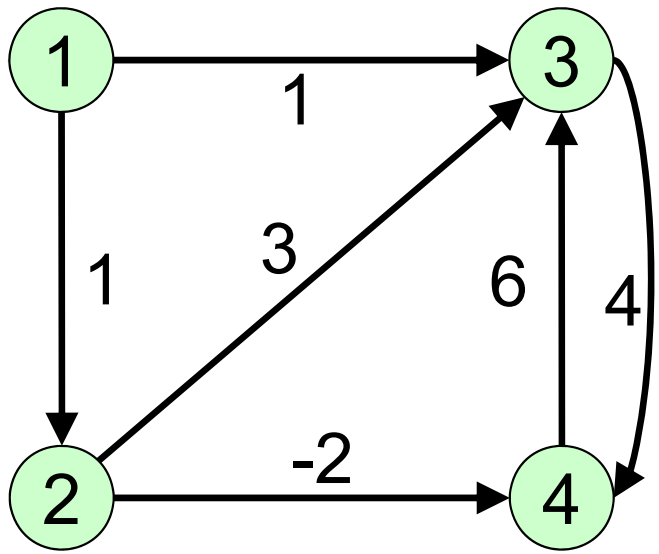
	k=0	1	2	3
s	0	0	0	0
a	∞	2	2	2
b	∞	6	3	3
c	∞	∞	6	4

差分不等式系の解の計算

変数の差の不等式系の解を求める

ケース1：全ての制約に2つの変数が現れる場合

$p_2 - p_1 \leq 1, p_3 - p_1 \leq 1,$
$p_3 - p_2 \leq 3, p_4 - p_2 \leq -2,$
$p_4 - p_3 \leq 4, p_3 - p_4 \leq 6$



差分不等式系の解
＝以下のグラフのポテンシャル

- 各変数に対応する頂点を追加
- 各制約$p_v - p_u \leq \alpha$に対し，
  長さ$= \alpha$の枝(u, v)を追加

ある頂点 s から，その他の頂点へ有向路が存在する場合

スライド14,15の命題より，

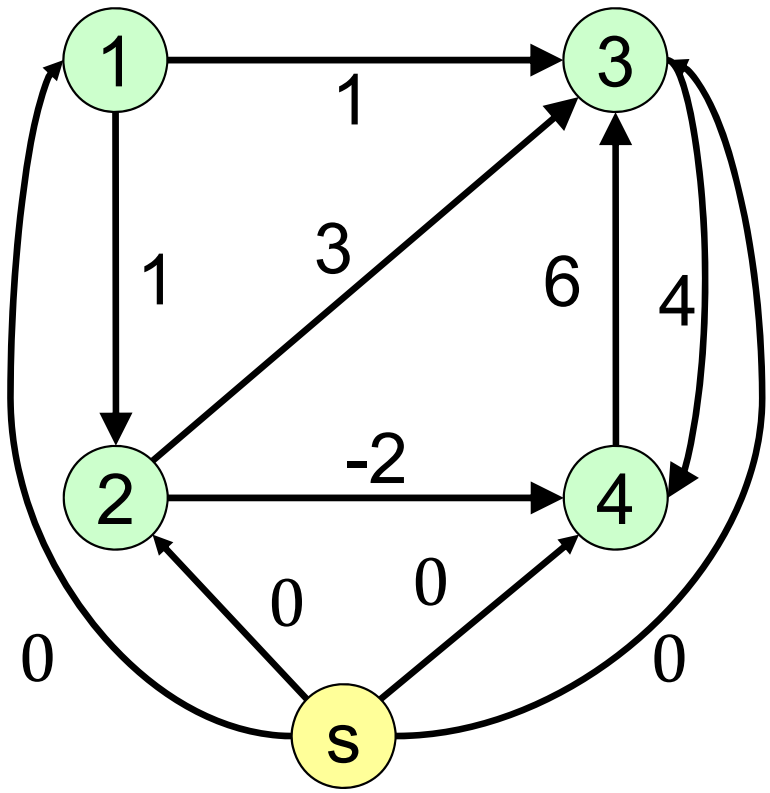
負閉路が存在する➔解なし

負閉路が存在しない➔最短路長d(v)は解

変数の差の不等式系の解を求める

ケース1：全ての制約に2つの変数が現れる場合

$p_2 - p_1 \leq 1, p_3 - p_1 \leq 1,$
$p_3 - p_2 \leq 3, p_4 - p_2 \leq -2,$
$p_4 - p_3 \leq 4, p_3 - p_4 \leq 6$



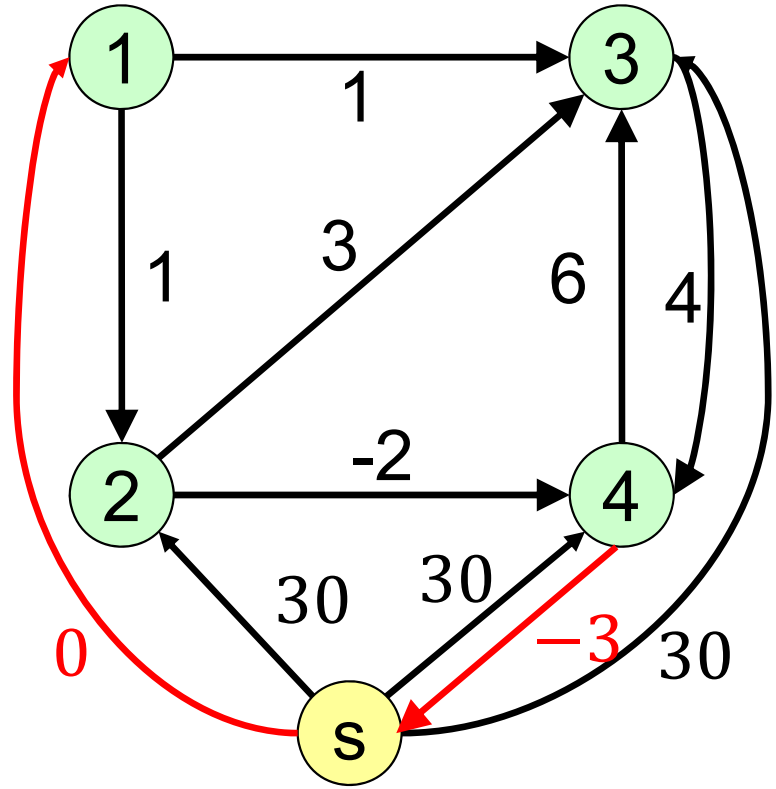
どの頂点からも，いずれかの頂点への
有向路が存在しない場合

新しい変数 p_s,
自明な不等式 $p_i - p_s \leq M \ (i = 1,2, \ldots, n)$
を追加（Mは任意の実数）
➔ 解集合は不変(←なぜか？),
対応するグラフにおいて，頂点1から
各頂点への有向路が必ず存在
（スライド10の仮定参照）
➔前のスライド同様に解を計算できる

変数の差の不等式系の解を求める

ケース2：変数1つの制約を含む場合

$p_2 - p_1 \leq 1, p_3 - p_1 \leq 1,$
$p_3 - p_2 \leq 3, p_4 - p_2 \leq -2,$
$p_4 - p_3 \leq 4, p_3 - p_4 \leq 6,$ $p_1 \leq 0, p_4 \geq 3$



(1)変数2つの制約に変換する

- 新しい変数 s を追加（変数p_s追加）
- 各変数$p_1, \ldots, p_n$に対し，
  - $p_v \leq \beta$の形の制約が存在
    ➔$p_v - p_s \leq \beta$ に置き換え（長さβの枝(s,v)追加）
  - $p_v \leq \beta$の形の制約がない
    ➔$p_v - p_s \leq M$を追加（長さMの枝(s,v)追加．
    負閉路が新たに生じないように，Mは十分大きくとる）
  - $p_v \geq \gamma$の形の制約が存在
    ➔$p_s - p_v \leq -\gamma$ に置き換え（長さ$-\gamma$の枝(v,s)追加）

(2)新しい不等式系の解 p_i $(i = 1, \ldots, n)$は元の不等式系の解になる