

# 数理経済学

## 第13回

# 安定結婚問題の拡張

塩浦昭義

東京工業大学 経営工学系 准教授

[shioura.a.aa@m.titech.ac.jp](mailto:shioura.a.aa@m.titech.ac.jp)

# 安定結婚問題の定義

- $n$ 人の「男性」(労働者)と $n$ 人の「女性」(仕事)のマッチング
- 「男性」は「女性」に対する選好順序をもつ
- 「女性」は「男性」に対する選好順序をもつ
- 駆け落ちする男女のペアが生まれない(安定な)マッチングを求める

男A:123 女1:BAC

男B:312 女2:BAC

男C:132 女3:CAB

割当の例:A-1, B-3, C-2

男性Cは現在のパートナー(女性2)より女性3が好き

女性3は現在のパートナー(男性B)より男性Cが好き

➡ 男性Cと女性3は駆け落ちする(割当は不安定)

# ブロッキングペアと安定マッチング

定義：男女のペア $(m, w)$  は(マッチング  $M$ に関する)

ブロッキングペア(駆け落ちペア)  $(m, w)$

- $\leftrightarrow$  (i) マッチング  $M$  でペアになっていない  
(ii) マッチング  $M$  での  $m$  の相手  $< w$   
(iii) マッチング  $M$  での  $w$  の相手  $< m$

定義： $M$ は安定マッチング $\leftrightarrow M$ にブロッキングペアが存在しない

男A:123 女1:BAC

男B:312 女2:BAC

男C:132 女3:CAB

安定な割当の例: A-2, B-1, C-3

定理 安定マッチングは常に存在  
受入保留アルゴリズムにより求めることが可能

# 研修医マッチング問題の定義

- $n$ 人の「研修医」を $m$ 箇所の「病院」に割り当てる
- 各病院  $i$  には定員  $c_i$  がある ( $c_1 + c_2 + \dots + c_m \geq n$  を仮定)
- 「研修医」は「病院」に対する選好順序をもつ
- 「病院」は「研修医」に対する選好順序をもつ
- 不満をもつ病院・研修医のペアをもたない

安定な割当を求めたい

研修医A: 213

研修医B: 213

研修医C: 123

研修医D: 312

割当  
案

病院1: A

病院2: C

病院3: BD

病院1(定員2): ABCD

病院2(定員1): CBAD

病院3(定員2): DABC

Bさんは病院3より病院1に行きたい  
病院1は定員に空きがある  
→不満が生じる

# ブロッキングペアと安定割当

**定義:** 研修医(resident)と病院(hospital)のペア( $r, h$ ) は  
(割当 A に関する) **ブロッキングペア**

- $\leftrightarrow$  (i) 割当 A において,  $r$  は  $h$  に割り当てられていない  
(ii) 割当 A において,  $r$  の割当先の病院  $< h$   
(iii) 割当 A において,  **$h$  に空きがある**

または  $h$  に割り当てられた最低順位の研修医  $< r$

**定義:** A は **安定割当**  $\leftrightarrow$  A にブロッキングペアが存在しない

割当  
案

病院1: A  
病院2: C  
病院3: BD

Bさんは病院3より病院1に行きたい  
病院1は定員に空きがある  
 $\rightarrow$  不満が生じる(ブロッキングペア)

# 研修医マッチング問題の拡張

- ・都会の病院は人気が高いことが多い
- ・地方の病院は人気が低いことが多い(切実)

→地方病院の研修医の人数を確保するための案

追加条件1: 地方病院の研修医を十分確保したい

→各病院に割り当てる研修医の人数に下限を設ける

追加条件2: 都会に来る研修医の総数を抑えたい

→各地域ごとに、その地域内の病院に割り当てられる

研修医の総数の上限を設ける

このような追加条件のもとで、安定な割当を見つけたい

---そもそも、存在するか？

# 追加条件下での安定割当の存在性

- 追加条件の下では、安定割当が存在しないことがある

(証明) “Rural Hospital” Theorem より、

(追加条件のない)任意の安定割当において、

各病院に割り当てられる研修医の人数は一意に定まる

∴ある安定割当において、

ある病院への割当人数 < 下限

ならば、追加条件1の下では安定割当は存在しない

同様に、ある地域への割当総数 > 上限

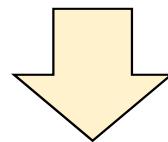
ならば、追加条件2の下では安定割当は存在しない

なので、前述の問題を解決するためには、

モデル(問題設定)を変更する必要あり。

# アルゴリズムの実行例: 病院プロポーズ

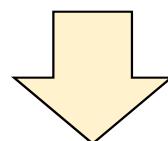
研修医A: 21X  
研修医B: 3X2  
研修医C: 2X1  
研修医D: 13X



病院1(定員2): XADC  
病院2(定員1): XCAB  
病院3(定員2): XDXX

各病院は  
定員分だけ  
プロポーズ

研修医A: 21X  
研修医B: 3X2  
研修医C: 2X1  
研修医D: 1XX



病院1(定員2): XADC  
病院2(定員1): XCAB  
病院3(定員2): XXXB

病院3の下限を  
2にする  
→ 安定割当が  
存在しない

“Rural Hospital” Theorem より,  
安定割当での各病院への割当人数は  
常に 2, 1, 1 となる

# 安定結婚問題の拡張

- ・その1:男女数が異なる場合
- ・その2:独身を許す(パートナーにしたくない異性を考慮)
- ・**その3:同順位を許す**
- ・その4:1対多マッチング(1つの病院に複数の研修医を割り当てる)

# 同順位を許した安定マッチング

- 今までの設定：異性に対して異なる順位をつけた
- ここでの設定：同じ順位の異性を許す
  - 同順位の異性はカッコで表記

男A: 2(41)3      女1:(BADC)

男B: 3(142)      女2:DC(AB)

男C: 2314      女3:A(DC)B

男D:(41)32      女4:BADC

A-1, B-3, C-2, D-4 は「**安定マッチング**」か？

(A,4)に注目：男性Aにとって 4 は 1 と同順位  
女性4にとって A は D より良い

→ 「駆け落ち」する？

**安定マッチング**をどう定義？ ← → **ブロックングペア**をどう定義？

- 3種類の安定性を導入（超安定，強安定，弱安定）

# 超安定マッチング

超安定---男女ペアは、互いが現在の相手以上ならば「駆け落ち」つまり、現状維持でも「駆け落ち」する

定義:  $M$  は超安定(super-stable)マッチング

$\leftrightarrow M$  に以下の意味でのブロッキングペアが存在しない

定義: 男女のペア  $(m, w)$  は (マッチング  $M$  に関する)

ブロッキングペア (駆け落ちペア)  $(m, w)$

$\leftrightarrow$  (i) マッチング  $M$  でペアになっていない

(ii) マッチング  $M$  での  $m$  の相手  $\leq w$

(iii) マッチング  $M$  での  $w$  の相手  $\leq m$

# 超安定マッチングの例

男A:2(41)3  
男B:3(142)  
男C:2314  
男D:(41)32

女1:(BAD)  
女2:DC(AB)  
女3:A(DC)B  
女4:BADC

A-1, B-3, C-2, D-4 は  
超安定マッチングではない  
(A,4) はブロッキングペア

男A:2(41)3  
男B:3(142)  
男C:2314  
男D:(41)32

女1:(BAD)  
女2:DC(AB)  
女3:A(DC)B  
女4:BADC

A-4, B-3, C-2, D-1 は  
超安定マッチングではない  
(A,1) はブロッキングペア  
Aの相手4と1は同順位  
1の相手DとAは同順位

- この例では、実は超安定マッチングは存在しない
- 全員が同順位の場合の問題例では、超安定マッチングは存在しない

男A:(123)  
男B:(312)  
男C:(132)

女1:(BAC)  
女2:(BAC)  
女3:(CAB)

# 強安定マッチング

強安定---男女ペアは、互いが現在の相手以上  
かつどちらかにとってより良い相手ならば「駆け落ち」  
つまり、どちらかが改善できれば「駆け落ち」する

定義： $M$ は強安定(strongly stable)マッチング  
 $\leftrightarrow M$ に以下の意味でのブロッキングペアが存在しない

定義：男女のペア( $m, w$ )は(マッチング  $M$ に関する)  
ブロッキングペア(駆け落ちペア) ( $m, w$ )  
 $\leftrightarrow$  (i) マッチング  $M$  でペアになっていない  
     (ii) マッチング  $M$  での  $m$  の相手  $w' \leq w$   
     (iii) マッチング  $M$  での  $w$  の相手  $m' \leq m$   
     (iv)  $w' < w$  または  $m' < m$  が成立

# 強安定マッチングの例

男A:2(41)3  
男B:3(142)  
男C:2314  
男D:(41)32

女1:(BAD)  
女2:DC(AB)  
女3:A(DC)B  
女4:BADC

A-1, B-3, C-2, D-4 は  
強安定マッチングではない  
(A,4) はブロッキングペア

男A:2(41)3  
男B:3(142)  
男C:2314  
男D:(41)32

女1:(BAD)  
女2:DC(AB)  
女3:A(DC)B  
女4:BADC

A-4, B-3, C-2, D-1 は  
強安定マッチング

- 強安定マッチングは存在することもある

男A:12      女1:BA  
男B:(12)    女2:BA

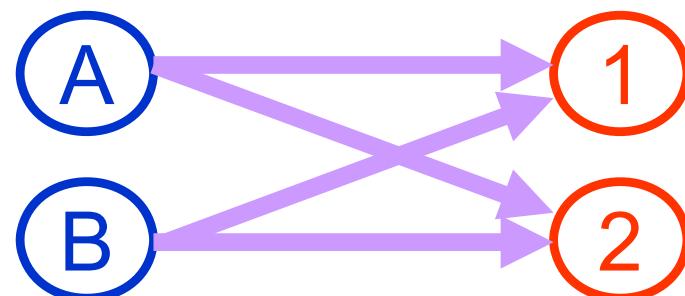
A-1, B-2 は強安定ではない  
(B,1) はブロッキングペア  
A-2, B-1 も強安定ではない  
(B,2) はブロッキングペア

# 超安定・強安定マッチングの計算

- ・受入保留アルゴリズムを修正することで、
  - ・超安定・強安定マッチングの有無
  - ・(存在する場合は)超安定・強安定マッチングが可能

## 修正のポイント

- ・男性は、同順位の女性全員にプロポーズ
- ・女性は、同順位の男性をすべて仮パートナーにする  
なので、以下のような状況がでてくる→この後の対応は



超安定・強安定で異なる  
(詳細は省略)

# 弱安定マッチング

強安定---男女ペアは、互いが現在の相手より良いならば「駆け落ち」つまり、互いに改善できれば「駆け落ち」する

定義：Mは弱安定(weakly stable)マッチング

↔ Mに以下の意味でのブロッキングペアが存在しない

定義：男女のペア( $m, w$ ) は(マッチング Mに関する)

ブロッキングペア(駆け落ちペア) ( $m, w$ )

↔ (i) マッチング M でペアになっていない

(ii) マッチング M での  $m$  の相手  $w' < w$

(iii) マッチング M での  $w$  の相手  $m' < m$

# 弱安定マッチングの計算

- ・弱安定マッチングは常に存在する
- ・計算も簡単: 受入保留アルゴリズムをそのまま利用
- ・求め方:
  1. 選好リストに同順位があれば、適当な順番で順位をつける
  2. 受入保留アルゴリズムを適用、安定マッチングを求める
  3. 求めた安定マッチングは、  
元の選好リストに対する弱安定マッチングになる