

数理経済学
第11回
住宅市場問題
1対1マッチング

塩浦昭義

東京工業大学 経営工学系 准教授

shioura.a.aa@m.titech.ac.jp

今後の授業の流れ

- これまでの講義内容
 - ひとりの意思決定者がより良い選択肢を選ぼうとする
 - よりよい選択肢のを見つけ方を議論
- これからの講義内容: 皆が満足する「良い」システム(制度)の設計
 - 複数の意思決定者が, それぞれより良い選択肢を選ぼうとする
 - それぞれ競合関係にある
 - システム(制度)設計者の立場から, 皆が満足するシステムを設計
(公平, わかりやすい, 嘘をついても得しない, . . .)

住宅市場問題

住宅市場問題

- n 人の各々は財(プレゼント)を持っていて、皆で交換する
- 多く人は、自分の財より、より良い他人の財が欲しい
- 交換して、よりよい財をもらうことにする
- どのように交換すれば、皆満足するか(不満をもたないか)?



具体例: 学生寮の部屋の再配分(論文でよく出てくる)

- n 人に寮の部屋が割り当てられた
- 多く人は、自分の部屋より、他人の部屋に住みたい
- 交換して、よりよい部屋を得ることにする
- どのように交換すれば、皆満足するか(不満をもたないか)?

住宅市場問題：詳しい定義

- n 人 $i=1,2,\dots,n$ に財が配られた (i さんの財= i とする)
- 各個人 i は, 財全体に対する選好(欲しい順番)をもつ
 - 記号: $j_1 \succ_i j_2 \succ_i \dots \succ_i j_n$
 - 「欲しさが同じ」は許さない
- 財を交換(再配分)して, よりよい状況に持って行きたい
→ どう配分するか?
- 配分の満たすべき条件(の一部)
 - **個人合理性**: 各個人に対し, 新たな配分により得られる財は, 元の財より悪くならない
 - **効率性**: 「全体としてより良い, 他の配分が存在しない」
配分 (x_1, x_2, \dots, x_n) が**効率的**
 $\leftarrow \rightarrow y_i \geq x_i (\forall i)$ かつ $y_k > x_k (\exists k)$ なる
配分 (y_1, y_2, \dots, y_n) が存在しない

住宅市場問題：具体例

①: 4 > 3 > 2 > 1

②: 3 > 2 > 4 > 1

③: 1 > 2 > 3 > 4

④: 4 > 2 > 1 > 3

①: 4 > 3 > 2 > 1

②: 3 > 2 > 4 > 1

③: 1 > 2 > 3 > 4

④: 4 > 2 > 1 > 3

①: 4 > 3 > 2 > 1

②: 3 > 2 > 4 > 1

③: 1 > 2 > 3 > 4

④: 4 > 2 > 1 > 3

①: 4 > 3 > 2 > 1

②: 3 > 2 > 4 > 1

③: 1 > 2 > 3 > 4

④: 4 > 2 > 1 > 3

①: 4 > 3 > 2 > 1

②: 3 > 2 > 4 > 1

③: 1 > 2 > 3 > 4

④: 4 > 2 > 1 > 3

個人合理性を
満たさない
(④の財2 < 財4)

効率性を
満たさない
(より良い配分あり)

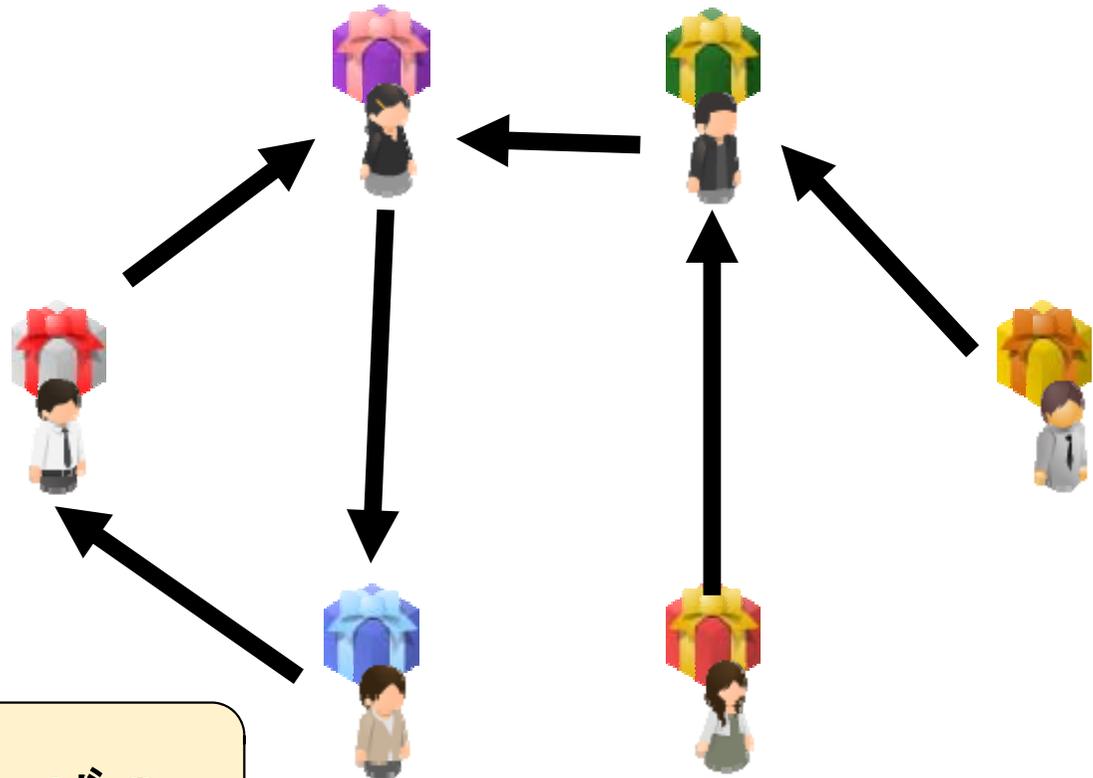
個人合理性
& 効率性を満たす

Top Trading Cycle (TTC) アルゴリズム

- top trading cycle (最良取引閉路) を利用したアルゴリズム
- 個人合理性, 効率性 + α を満たす配分を求める
- とてもシンプル!

手順1:
現時点で
最も欲しい財
(をもつ人)を指さす
→ 有向閉路が
必ず一つはできる

なぜ?

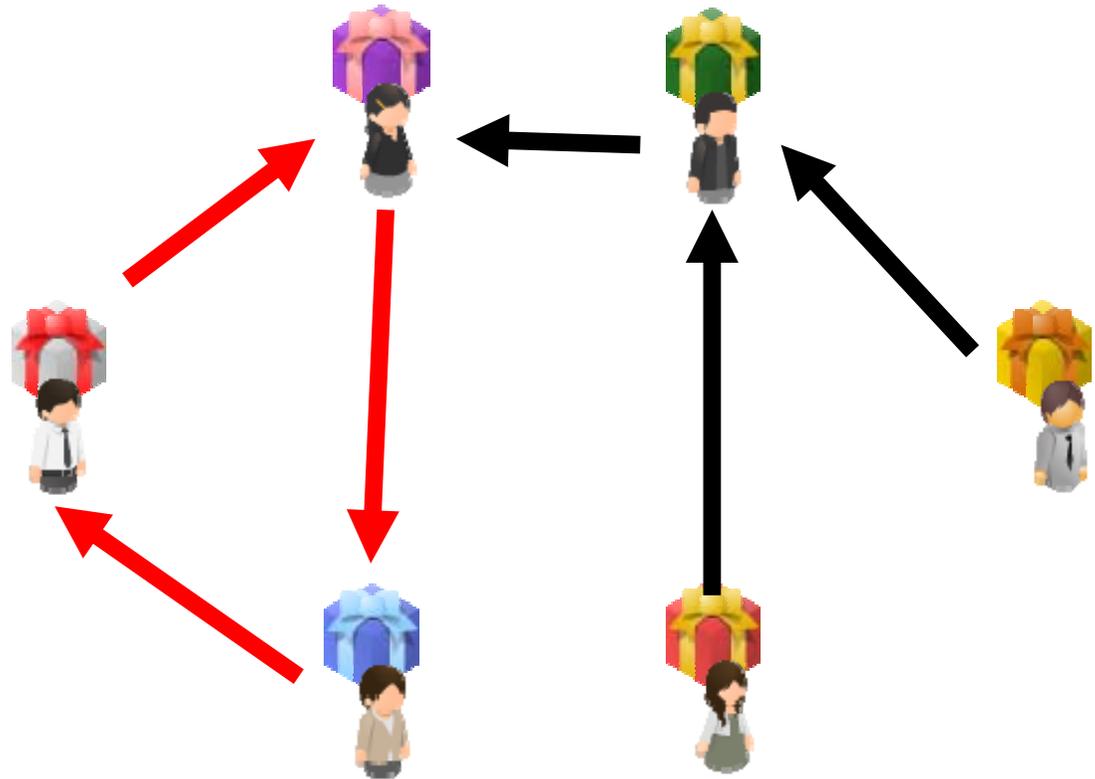


Top Trading Cycle (TTC) アルゴリズム

- top trading cycle (=最良取引閉路)を利用したアルゴリズム
- 個人合理性, 効率性+ α を満たす配分を求める
- とてもシンプル!

手順2:

閉路に沿って
財を交換,
閉路を削除.
手順1へ.

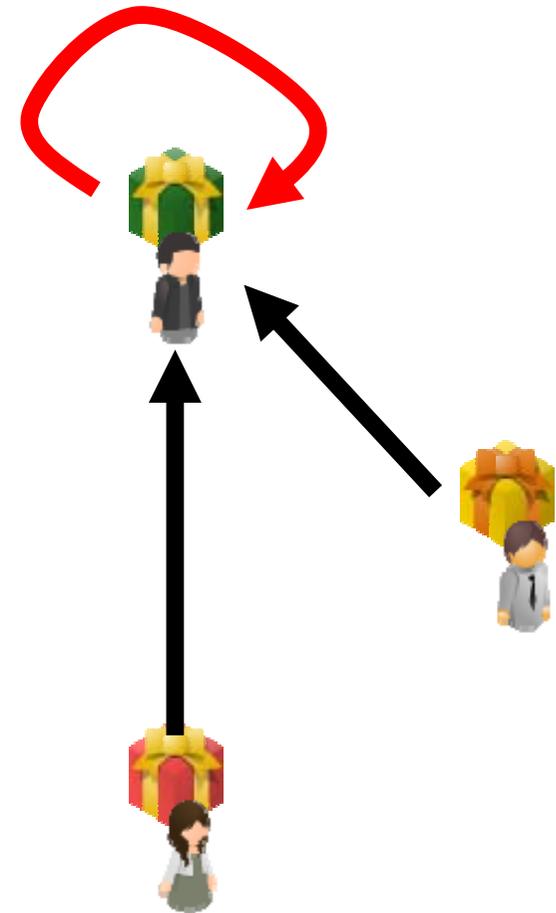


Top Trading Cycle (TTC) アルゴリズム

- top trading cycle (=最良取引閉路)を利用したアルゴリズム
- 個人合理性, 効率性+ α を満たす配分を求める
- とてもシンプル!

手順1:
現時点で
最も欲しい財
(をもつ人)を指さす

手順2:
閉路に沿って財を交換,
閉路を削除.
手順1へ.



Top Trading Cycle (TTC) アルゴリズム

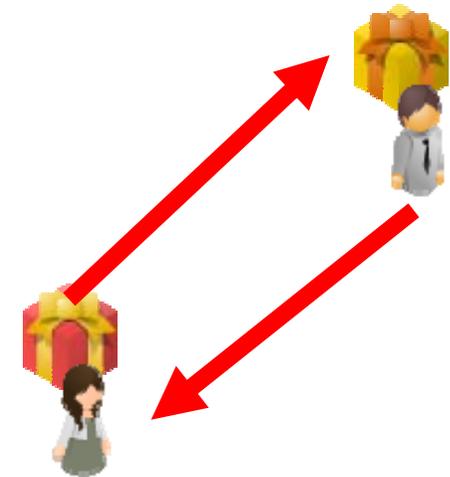
- top trading cycle (=最良取引閉路)を利用したアルゴリズム
- 個人合理性, 効率性+ α を満たす配分を求める
- とてもシンプル!

手順1:

現時点で
最も欲しい財
(をもつ人)を指さす

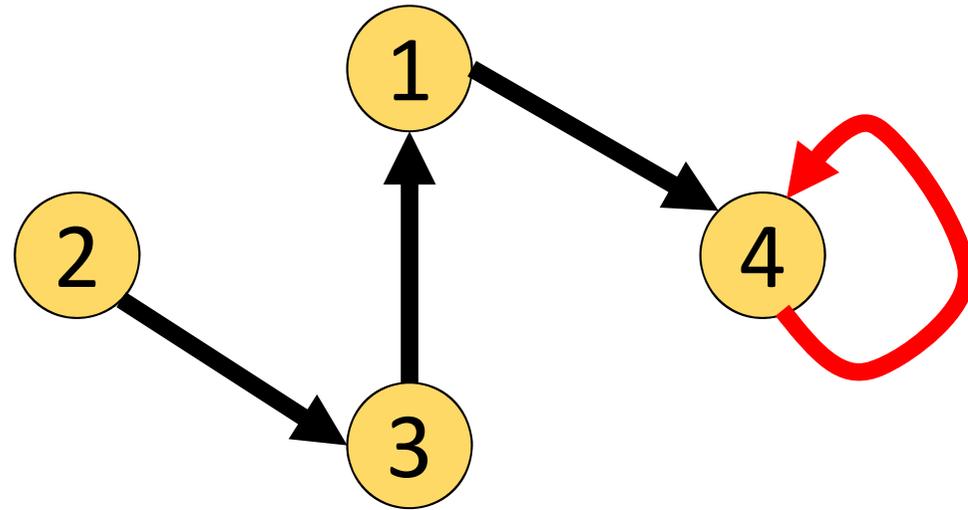
手順2:

閉路に沿って財を交換,
閉路を削除.
手順1へ.

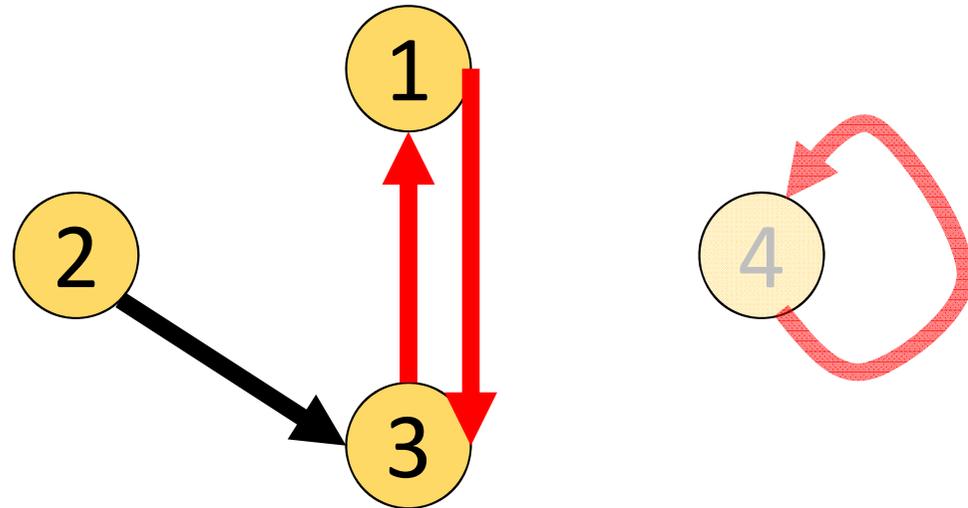


TTCアルゴリズム：実行例1

- ① 4 > 3 > 2 > 1
 ② 3 > 2 > 4 > 1
 ③ 1 > 2 > 3 > 4
 ④ 4 > 2 > 1 > 3

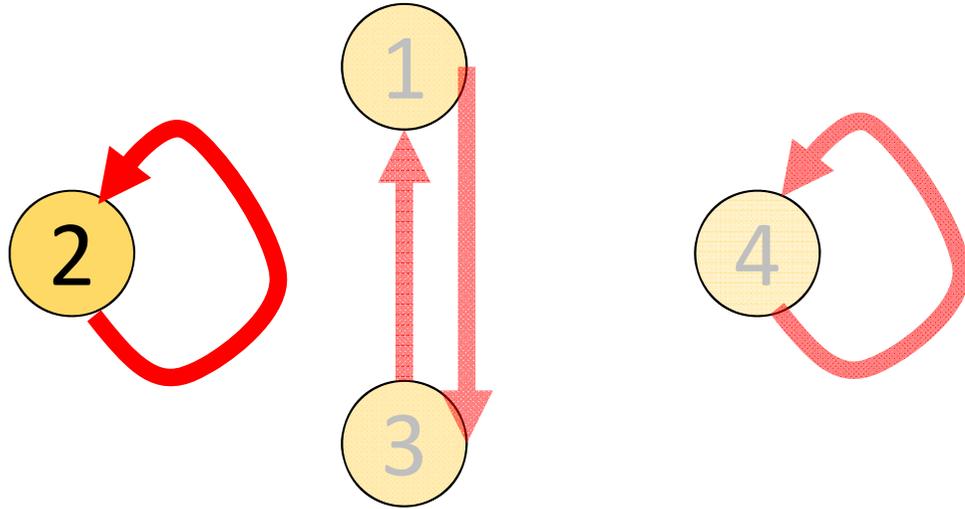


- ①: ✕ > 3 > 2 > 1
 ② 3 > 2 > ✕ > 1
 ③ 1 > 2 > 3 > ✕
 ④ 4 > 2 > 1 > 3



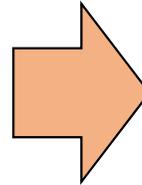
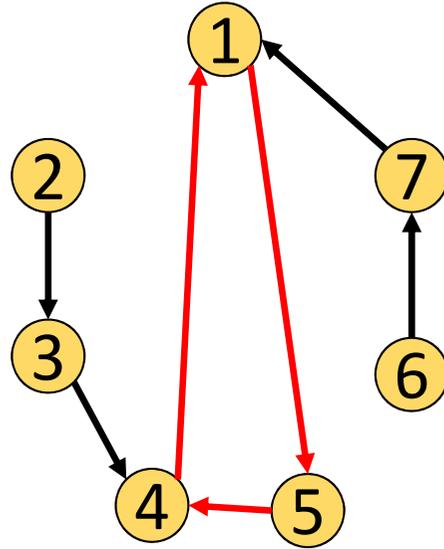
TTCアルゴリズム：実行例1

- ①: ~~1~~ > 3 > 2 > 1
- ②: ~~1~~ > 2 > ~~3~~ > 1
- ③: 1 > 2 > 3 > ~~4~~
- ④: 4 > 2 > 1 > 3

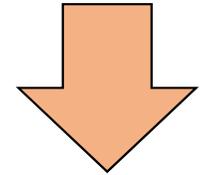


TTCアルゴリズム：実行例2

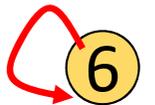
①: 5671234
 ②: 3456712
 ③: 4527136
 ④: 1234567
 ⑤: 4523671
 ⑥: 7123456
 ⑦: 1745632



①: 5671234
 ②: 3456712
 ③: 4527136
 ④: 1234567
 ⑤: 4523671
 ⑥: 7123456
 ⑦: 1745632



①: 5671234
 ②: 3456712
 ③: 4527136
 ④: 1234567
 ⑤: 4523671
 ⑥: 7123456
 ⑦: 1745632



TTC配分の個人合理性

定義: **TTC配分** = TTCアルゴリズムが与える配分

命題 TTC配分は個人合理性を満たす

各個人に対し、
新たな配分により
得られる財は、
元の財より悪くならない

(証明) 各個人の行動は以下の通り:

第1希望を指さす

→ 第1希望が他人に取られたら, 第2希望を指さす

→ 第2希望が他人に取られたら, 第3希望を指さす

→ ...

→ 希望の財が得られない場合, いつかは自分のもつ財を指さす

→ 閉路ができるので, 自分自身がその財を得る

よって, 各個人は, 自分のもつ財より悪い財を得ることはあり得ない

TTC配分の効率性

定理 TTC配分は効率性を満たす

(証明) TTC配分 = 配分 (x_1, x_2, \dots, x_n) とおく
 配分 (x_1, x_2, \dots, x_n) が **効率的**

$\leftrightarrow y_i \geq x_i (\forall i)$ かつ $y_k > x_k (\exists k)$ なる
 配分 (y_1, y_2, \dots, y_n) が存在しない

$\leftrightarrow y_i \geq x_i (\forall i)$ を満たす配分 (y_1, y_2, \dots, y_n) は (x_1, x_2, \dots, x_n) のみ

これを示す

S_1 = 第1回目の反復で財が割り当てられた人々

$\rightarrow \forall j \in S_1: x_j$ は j さんにとって最良の財

$\rightarrow y_j \geq x_j$ を満たす財は $y_j = x_j$ のみ

$\therefore y_i \geq x_i (\forall i)$ ならば $y_i = x_i (\forall i \in S_1)$

よって, $\forall j \notin S_1: y_j \in N - \{x_i \mid i \in S_1\}$

TTC配分の効率性

S_2 = 第2回目の反復で財が割り当てられた人々

→ $\forall j \in S_2: x_j$ は j さんにとって、残りの財 $N - \{x_i \mid i \in S_1\}$ の中で最良

→ 残りの財の中で $y_j \geq x_j$ を満たす財は $y_j = x_j$ のみ

∴ $y_i \geq x_i (\forall i)$ ならば $y_i = x_i (\forall i \in S_1 \cup S_2)$

よって、 $\forall j \notin S_1 \cup S_2: y_j \in N - \{x_i \mid i \in S_1 \cup S_2\}$

これを繰り返すと、 $y_i \geq x_i (\forall i)$ ならば $y_i = x_i (\forall i)$ が得られる。

TTCアルゴリズムの耐戦略性

アルゴリズム(ルール)の耐戦略性:

ある人が嘘(本来と異なる)選好を申告しても,
より良い財を得ることはできない

←→ 自分の選好を正直に申告するが最良

定理 TTCアルゴリズムは対戦略性を満たす

(証明)ある人(iさん)がk回目の反復で財の割当を得たとする。
そのとき, k-1回目までの各反復において

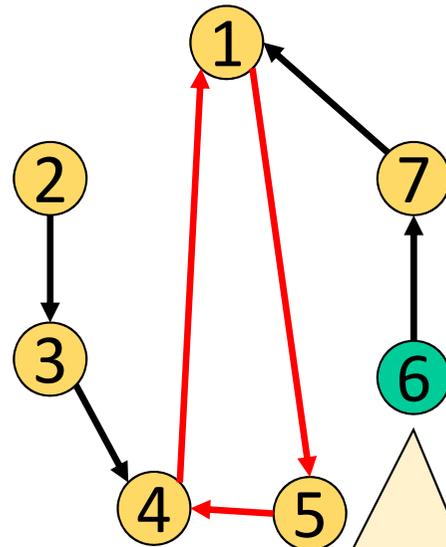
ある有向閉路ができ, 一部の人々に財が割り当てられている
その閉路には, iさんは含まれない:

iさんがどこを指さしても, 生成された閉路には影響なし
よって, 嘘をついたとしても,

正直な申告で得ることのできる財より良い財は得られない

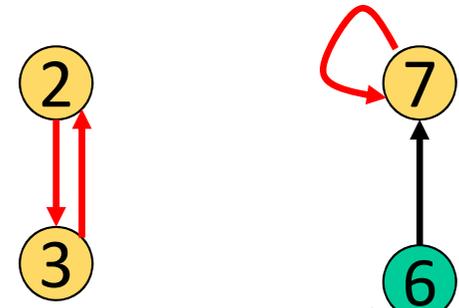
TTCアルゴリズム：嘘をついた例

①: 5671234
 ②: 3456712
 ③: 4527136
 ④: 1234567
 ⑤: 4523671
 ⑥: 7123456
 ⑦: 1745632



どこを指差しても
閉路は不変

①: 5671234
 ②: 3456712
 ③: 4527136
 ④: 1234567
 ⑤: 4523671
 ⑥: 7123456
 ⑦: 1745632



どこを指差しても
閉路は不変

①: 5671234
 ②: 3456712
 ③: 4527136
 ④: 1234567
 ⑤: 4523671
 ⑥: 7123456
 ⑦: 1745632



⑥さんは最悪の財を得る予定
 しかし、
 各反復で嘘をついても
 閉路には影響なし

TTC配分の強コア性

個人合理性 & 効率性を満たす場合でも、問題が生じることがあり

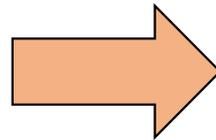
$$\textcircled{1}: 4 > 3 > \boxed{2} > 1$$

$$\textcircled{2} \boxed{3} > 2 > 4 > 1$$

$$\textcircled{3} \boxed{1} > 2 > 3 > 4$$

$$\textcircled{4} \boxed{4} > 2 > 1 > 3$$

①と③が結託して、
このグループで
財の再配分をする



$$\textcircled{1} \boxed{3} > 1$$

$$\textcircled{3} \boxed{1} > 3$$

①はより良い財、
③は同じ財
→ 独立に交換した
方が良い

望ましい配分(強コア配分): 「一部のグループが逸脱して、
グループの皆が損をせず、誰か一人以上が得をする」
ことが起こらない

定理 TTC配分は強コア性を満たす。
さらに、強コア性を満たす配分はTTC配分のみ。

証明は省略

演習問題

①: 3765421

②: 1234567

③: 2467531

④: 1247653

⑤: 3214765

⑥: 2476135

⑦: 2345671

問1: 右の住宅市場問題の例に
TTCアルゴリズムを適用して
配分を計算せよ.

各反復のグラフおよび閉路を書くこと.

問2: 右の住宅市場問題の例のTTC配分を計算せよ.

また, それ以外の配分で,

個人合理性および効率性を

満たすものを求めるとともに,

それが強コアでない理由を述べよ.

①: 231

②: 132

③: 123

問3: 有向グラフにおいて, 各頂点から出る枝がちょうど1本
存在するとき, 有向閉路が必ず存在することを証明せよ.
また, 「誰がどこを指さしている」という情報のみを使って,
有向閉路を見つける手順を説明せよ.