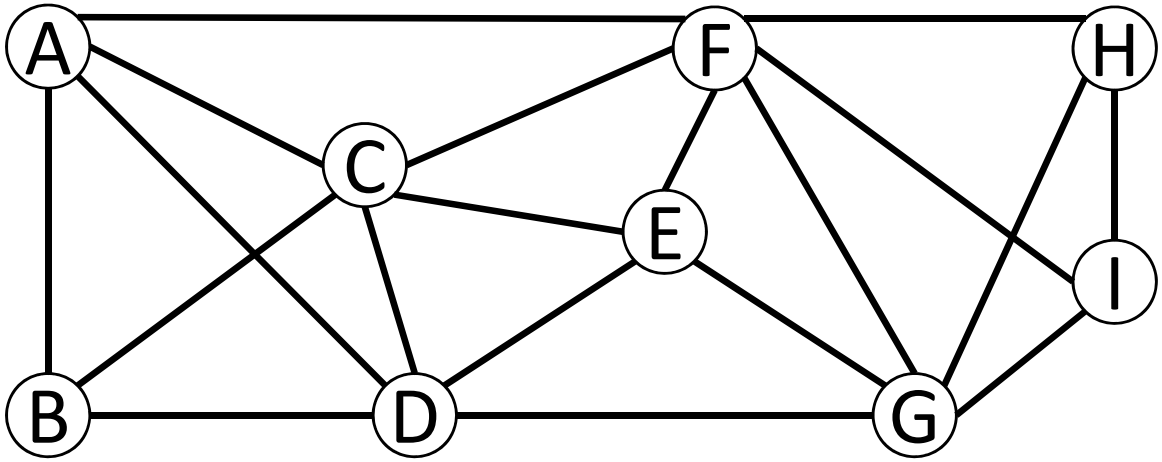
2017年度 数理経済学
第5回
最小全域木問題

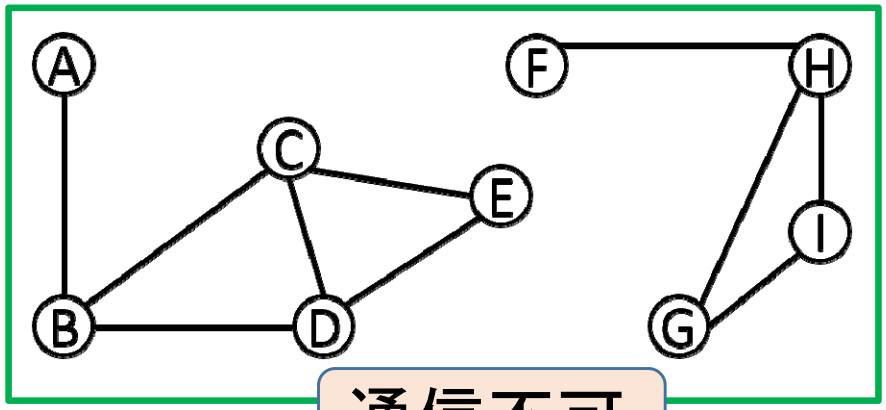
塩浦昭義
東京工業大学 経営工学系 准教授
shioura.a.aa@m.titech.ac.jp

最小全域木の例：通信ネットワークの構築

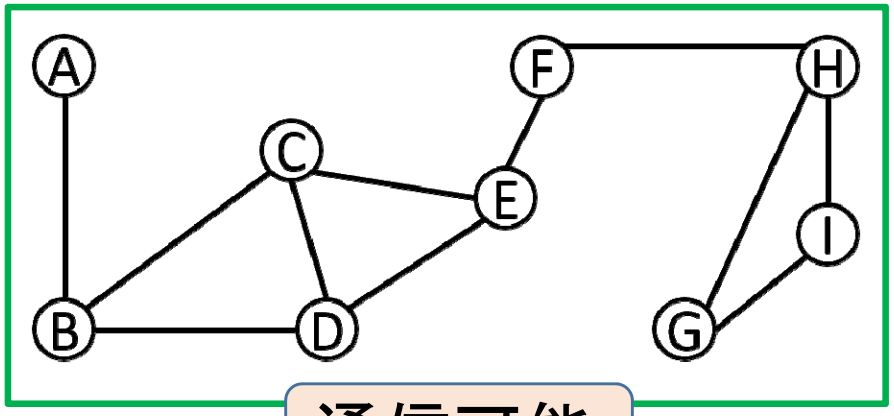
- 大学内の通信用ネットワークを構築したい
  - 地点 A, B, …, I をケーブルで接続，互いに通信したい
  - 直接ケーブルで接続できるところ，できないところがある
  - 複数のケーブルで繋がっていても可

接続可能な地点





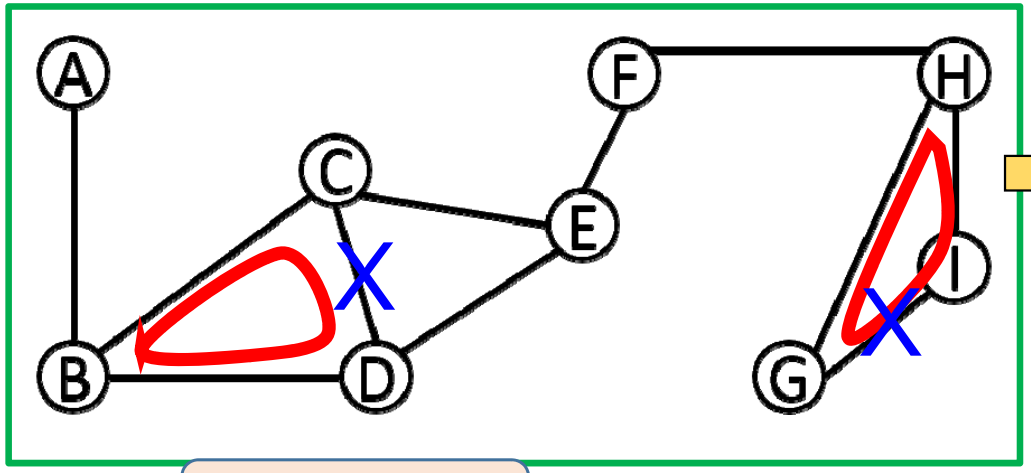
通信不可



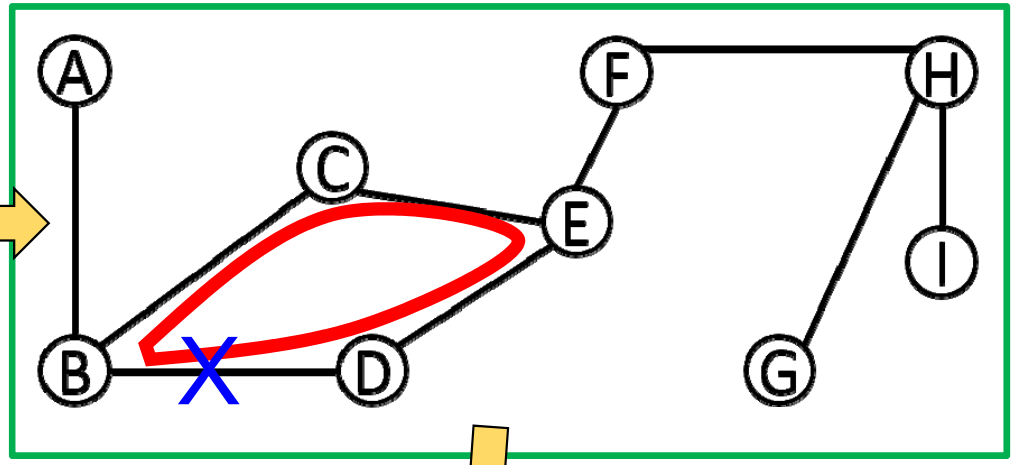
通信可能

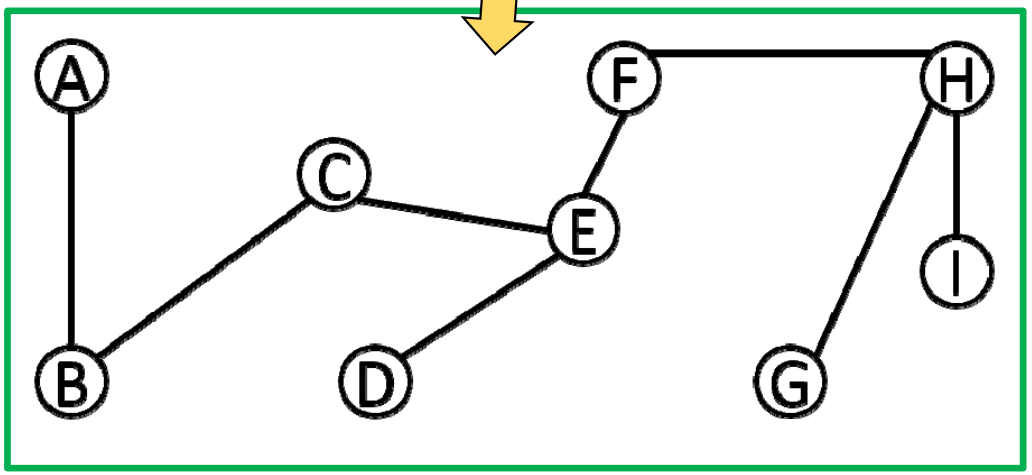
無駄を省いたネットワーク

- 通信できればOK
  - 無駄なケーブルはできる限り省く
  - ケーブルで一周できる➔周上の各地点に2系統の通信路
    ➔ケーブルをひとつ削除しても通信可



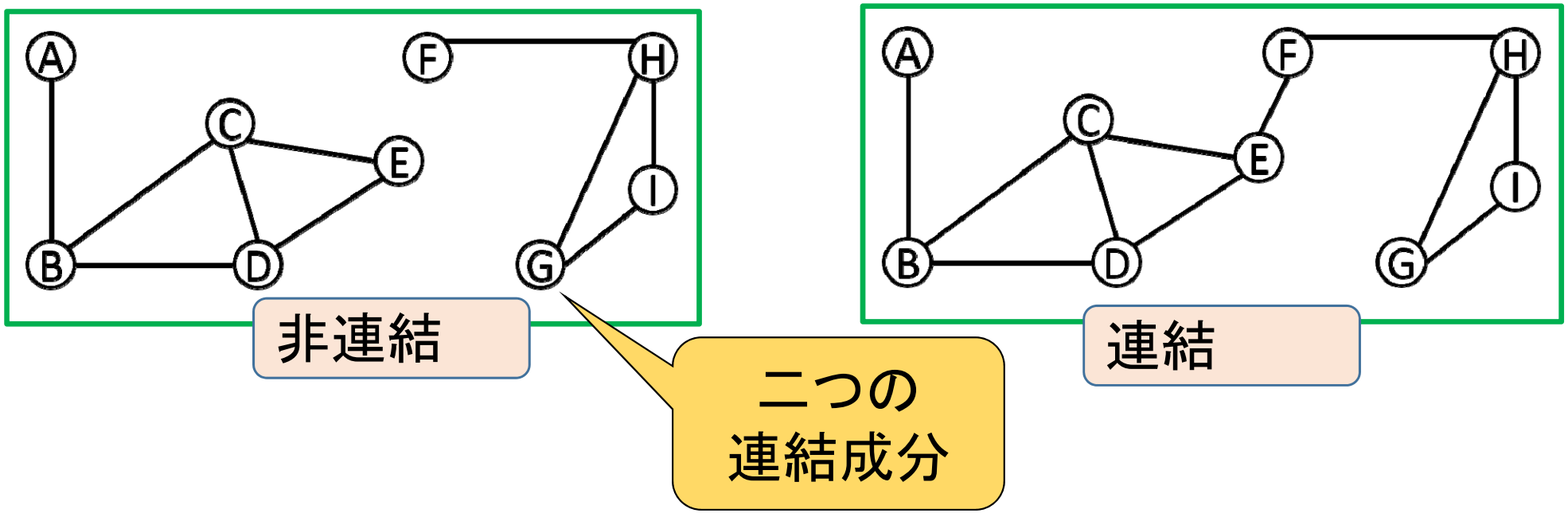
通信可能





連結性

定義：グラフが連結＝すべての頂点対の間に路が存在



定義：連結成分＝極大な連結部分グラフ

（つまり，枝で繋がっている部分グラフのこと）

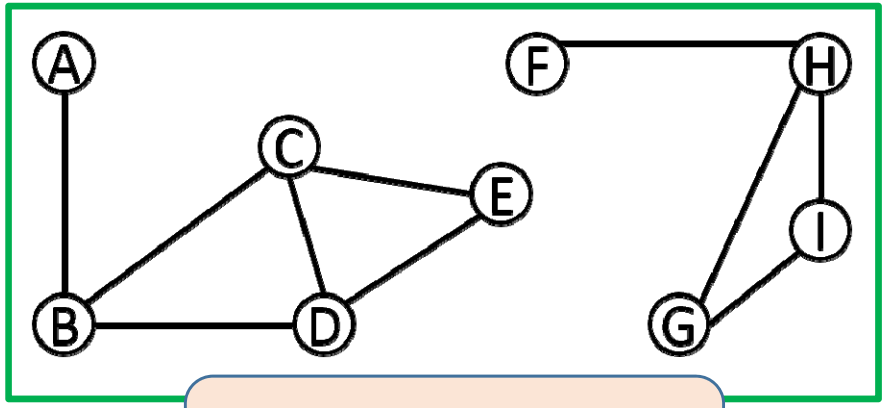
- 非連結なグラフには，複数の連結成分が存在
- グラフ全体が一つの連結成分 ←→ グラフが連結

グラフの全域木

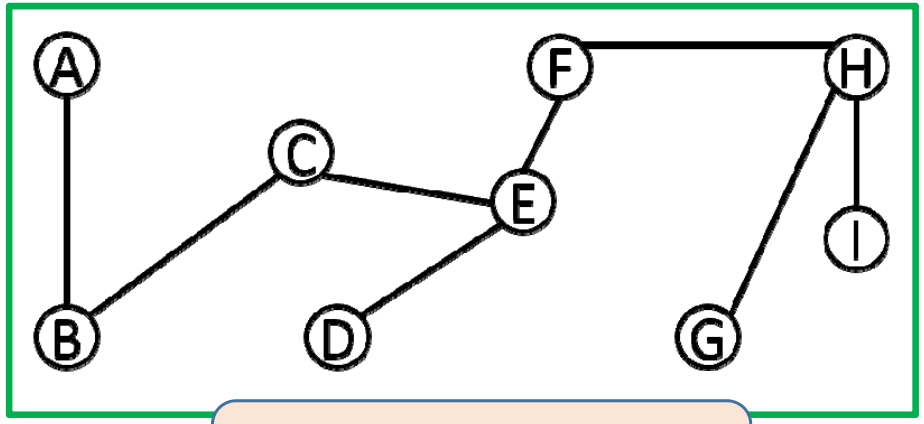
定義：全域木＝次の条件を満たす枝の部分集合 T

(i) グラフ (V, T) は連結　　(ii) 枝集合 T は閉路を含まない

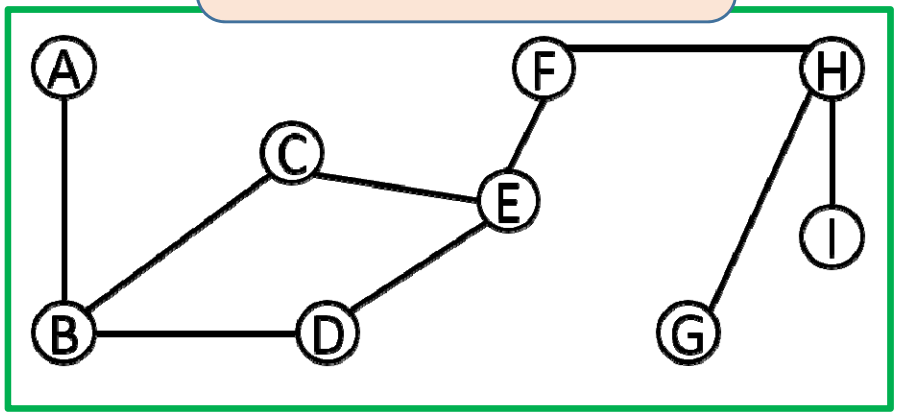
（つまり，全域木 -- 無駄のないネットワークのこと）

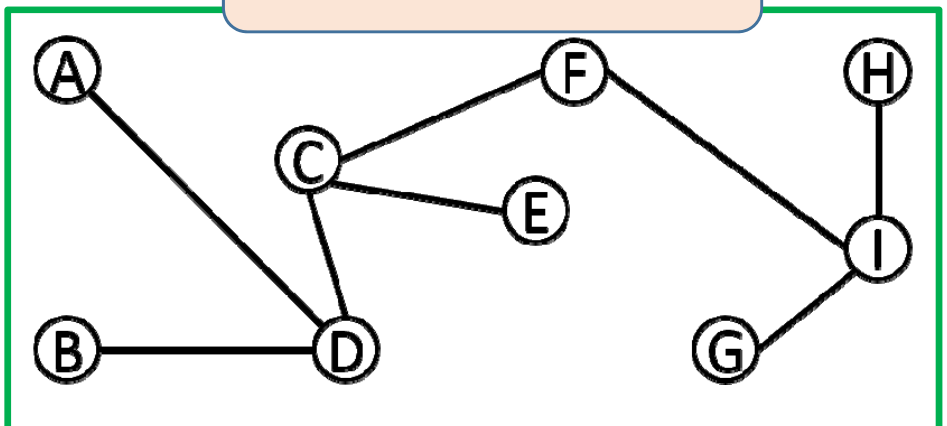


全域木ではない



全域木である

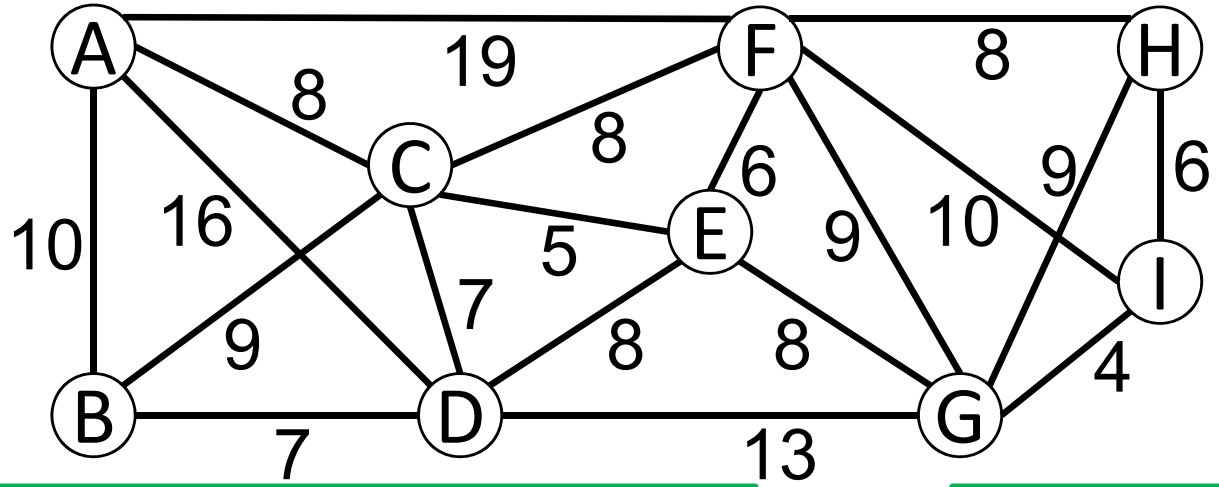




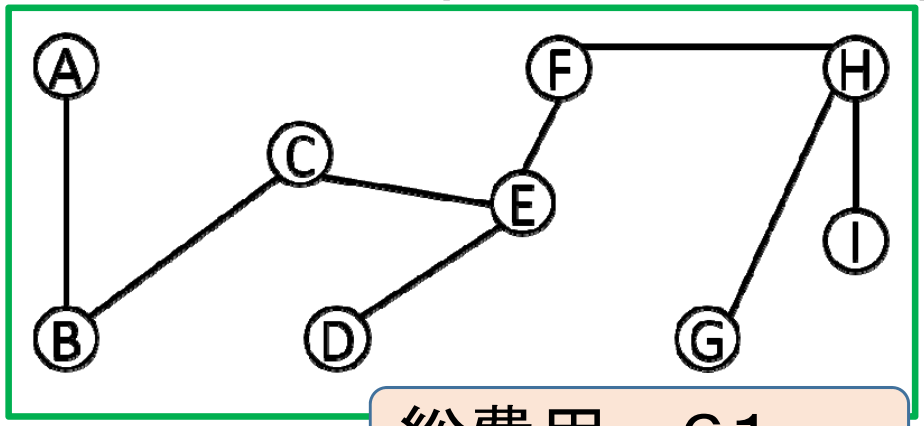
最小全域木問題

- 大学内の通信用ネットワークを構築したい
  - ケーブル(u,v)の設置には費用c(u,v) > 0が必要
  - 通信可能なネットワークを，出来るだけ最小費用でつくりたい

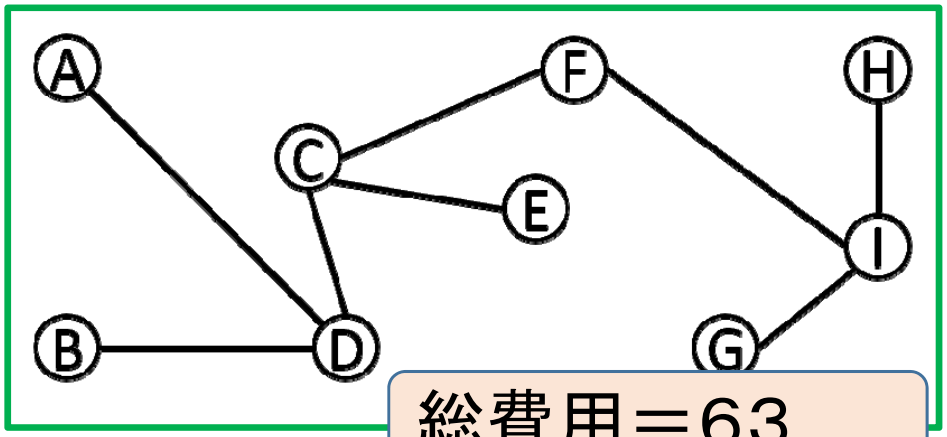
  ➔費用の和が最小の全域木を求める問題



各ケーブルの設置費用



総費用＝61



総費用＝63

最小全域木問題の定義

- 入力: 無向グラフ G=(V, E), 各枝の (u,v) の費用 c(u,v) > 0
- 出力: 費用の和が最小の全域木（最小全域木）

今後の方針

- どうやって，全域木を求めるか？
  - 「全域木」のことをよく理解する
    ➔全域木の求め方がわかる

- どうやって，最小全域木を求めるか？
  - 「最小全域木」のことをよく理解する
    ➔最小全域木の求め方がわかる

全域木の特徴付け

定義：全域木＝次の条件を満たす枝の集合 T

(i) グラフ (V, T) は連結　(ii) 枝集合 T は閉路を含まない

定理: グラフGの任意の枝集合 $T \subseteq E$ に対し，以下の条件は等価

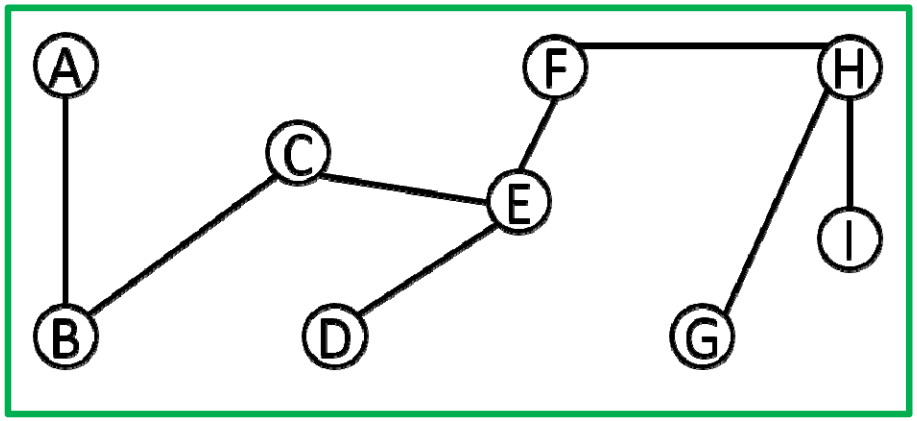
(1) T は全域木

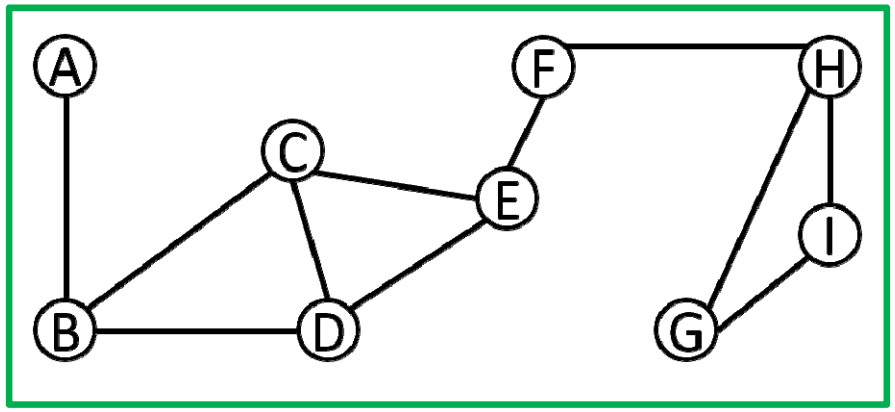
(2) (V, T) の任意の2頂点の間に路はただ1つ存在

(3) (V, T) は連結，ただし T から任意の枝を削除すると非連結

(4) |T| = |V| - 1, かつグラフ (V,T) は連結

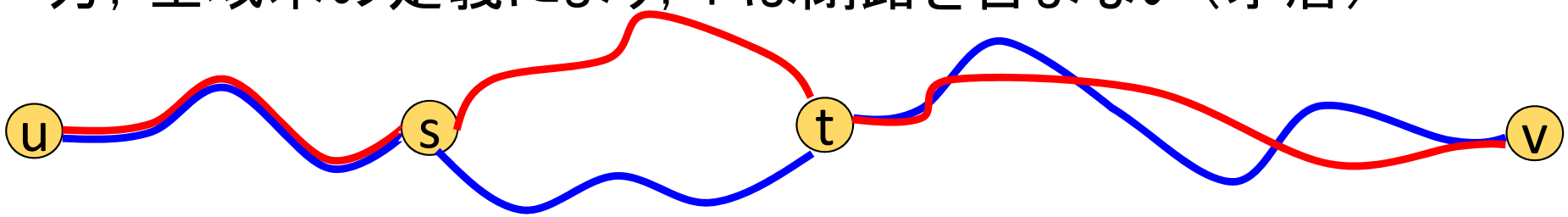
(5) |T| = |V| - 1, かつ T は閉路を含まない





(1)➔(2)の証明

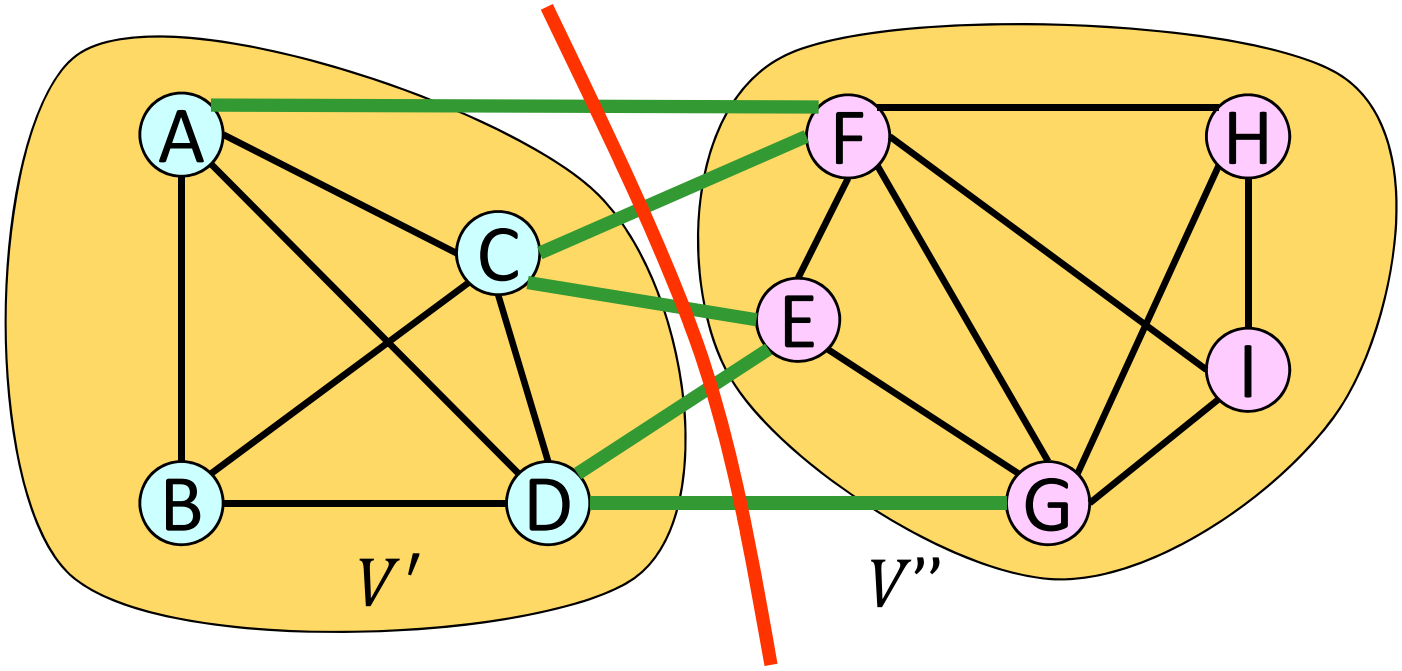
- (1)「Tは全域木」を仮定して,
  (2)「任意の2頂点u, vの間に路はただ1つ存在」を証明する.
- T の頂点 u, v を任意に選ぶ.
- 定義により，全域木T は連結．ゆえに u, v の間に路は1つ以上存在．異なる2つの路 P, P’ が存在すると仮定し，矛盾を導く.
- P, P’ は共に u から v への（異なる）路なので，どこかで分岐し，その後再び合流する.
- 最初に分岐する頂点をs, その後最初に合流する頂点を t とする（その後，再度分岐，合流する可能性あり）.
- s と t を結ぶ P (P’) の部分路を Q (Q’) とおく．すると，Q, Q’ は両端点 s, t 以外の頂点を共有しない．よって，Q∪Q’ は閉路となる.
- 一方，全域木の定義により，T は閉路を含まない（矛盾）



グラフのカットセット

- V', V'': グラフの頂点集合の分割（全ての頂点を2つに分けたもの）
- 定義：V', V'' に関するカットセット$E(V', V'')$

  ←→V', V''を結ぶ枝全ての集合

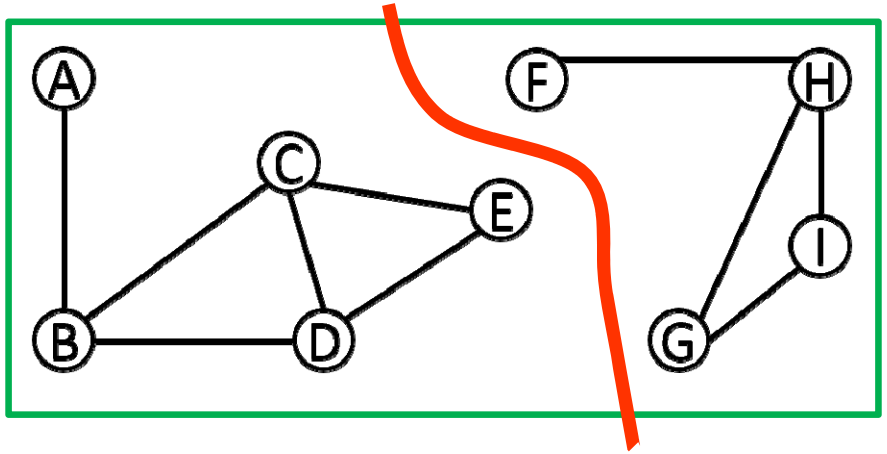


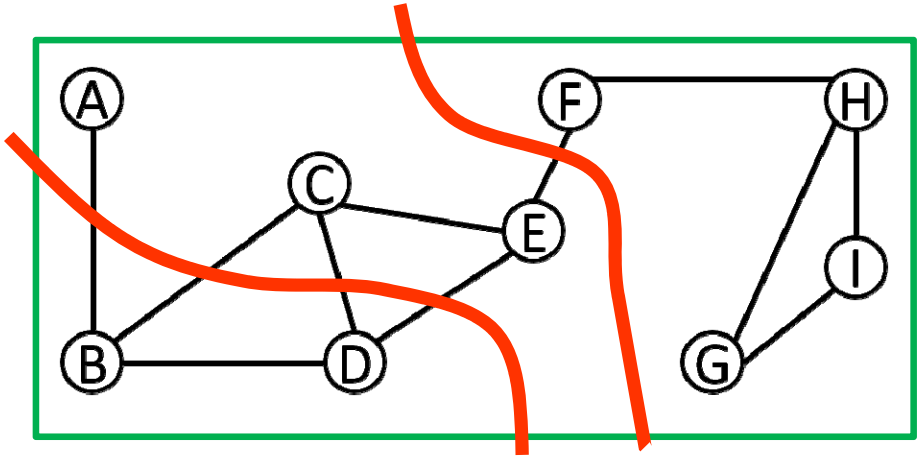
※ ある川に懸かる橋を集めたもの，というイメージ

カットセットと連結性

命題: Gの枝集合 $T \subseteq E$ に対し，次が成立:
(V, T) は連結
　⇔ 任意のカットセット$E(V', V'')$ に対し，$T \cap E(V', V'') \neq \emptyset$

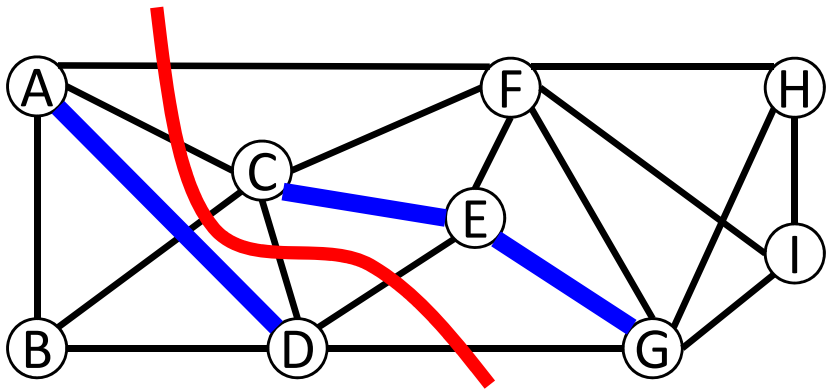
証明
[→] $u \in V', v \in V''$ を選ぶ→ 定義より，u と v は路で繋がれている
　→ 路のいずれかの枝は$E(V', V'')$ の枝
[←] 対偶を証明:ある頂点 u と v は路で繋がっていない
　→ u を含む連結成分 V' に対し，$T \cap E(V', V \setminus V') = \emptyset$ 成立

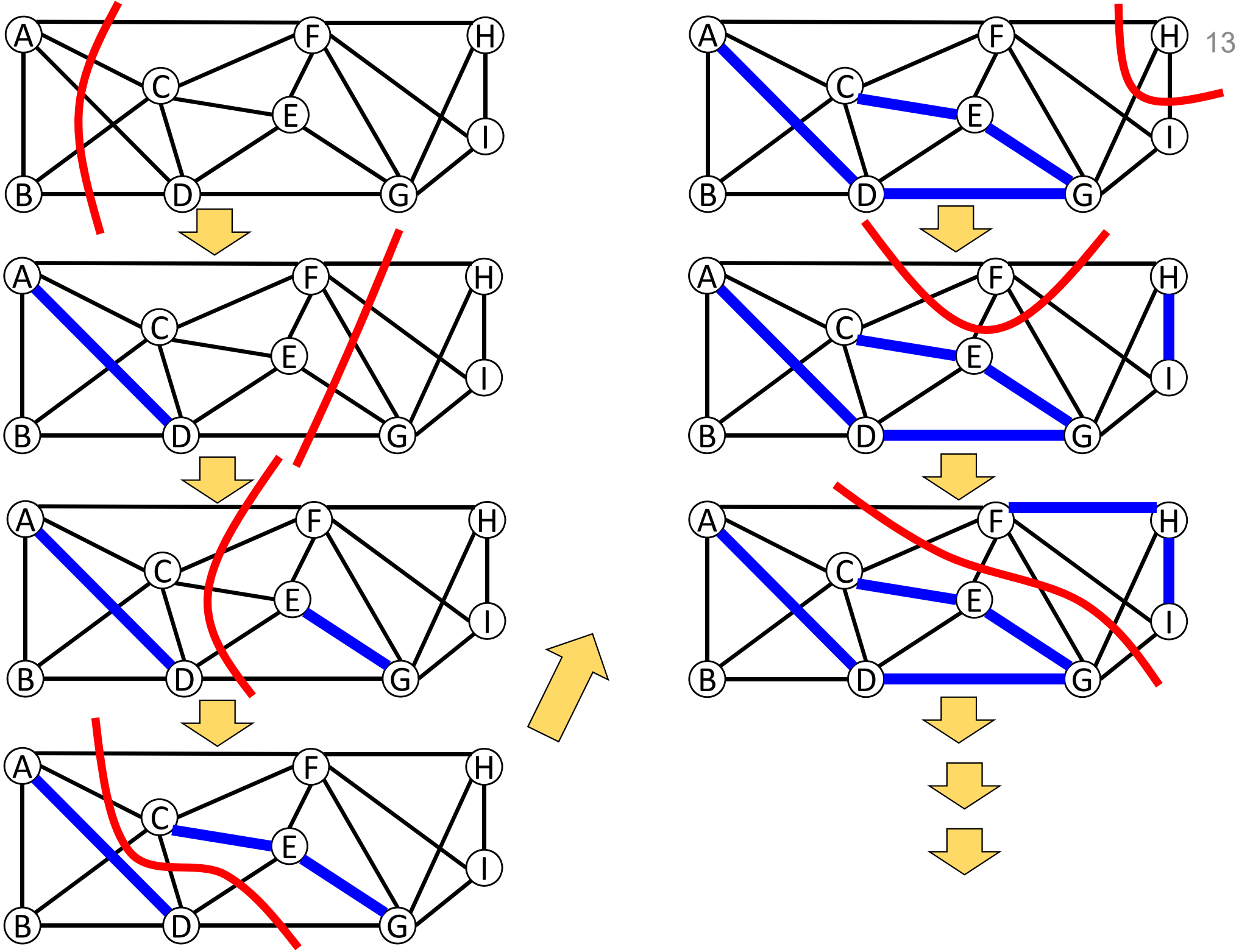




全域木の求め方その1

- 枝を1つずつ選び，T に追加していく
- T が連結でない ➔ あるカットセットの枝を T は含まない
  ➔ そのカットセットの枝を追加する
- T が連結になったら終了（🡸➔ 枝数が |V|-1 のとき）
- 途中で閉路ができないことに注意（なぜ？）




A
B
C
D
E
F
G
H
I

カットセットと最小全域木

任意のカットセットの枝のうち，少なくとも1つは全域木に含まれる
→ カットセットの中で費用最小の枝を追加すると良い？ Yes!

定理:
$E(V', V'')$: 任意のカットセット
(u,v): カットセット$E(V', V'')$ の中で費用最小の枝
➔(u,v)を含む最小全域木T*が存在

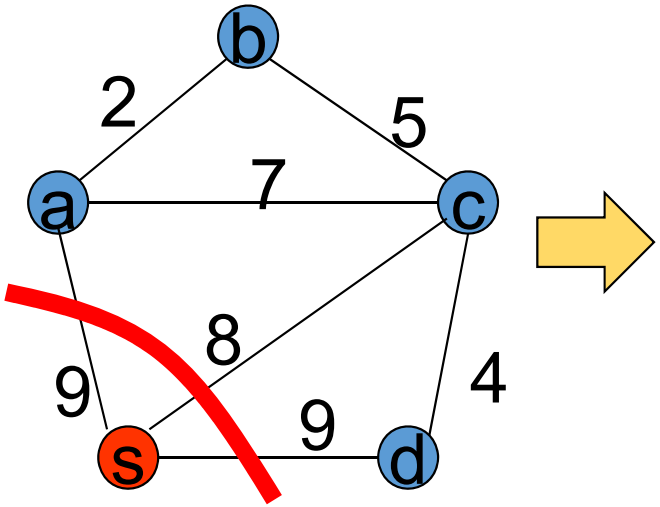
証明は後ほど

プリム(1957)（ヤルニーク(1930)）のアルゴリズム

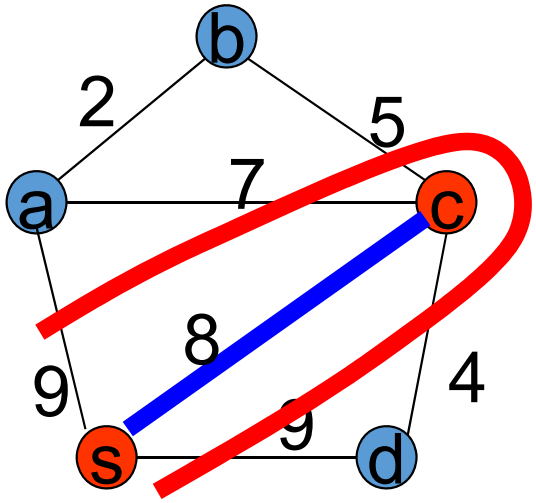
- 適当な頂点s を選び，固定
- s を根として，木を徐々に成長させる.
- その際，できるだけ費用の小さい枝を追加する

プリムのアルゴリズム

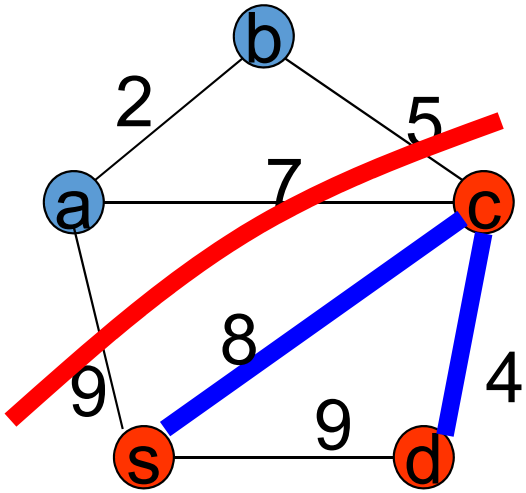
- 適当な頂点s を選び，固定
- s を根として，木Tを徐々に成長させる.
- その際，できるだけ費用の小さい枝をTに追加



V’={s}, V’’=V-V’ に関するカットセットに注目，費用最小の枝(s,c)を追加



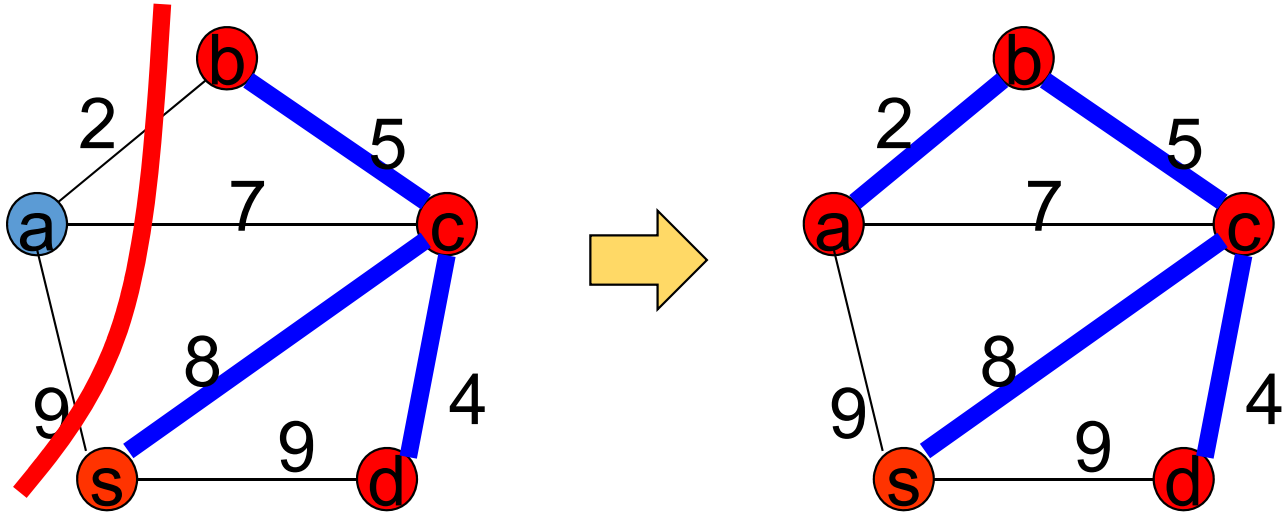
V’={s,c}, V’’=V-V’ に関するカットセットに注目，費用最小の枝(c,d)を追加



V’={s,c,d}, V’’=V-V’ に関するカットセットに注目，費用最小の枝(b,c)を追加

プリムのアルゴリズム

- 適当な頂点s を選び，固定
- s を根として，木Tを徐々に成長させる.
- その際，できるだけ費用の小さい枝をTに追加



終了

V’={s,c,d,b}, V’’=V-V’
に関するカットセット
に注目，費用最小の
枝(a,b)を追加

カットセットと閉路

命題: 任意のカットセット$E(V',V'')$と閉路 C に対し,
$E(V',V'') \cap C \neq \emptyset$ ならば $|E(V',V'') \cap C| \geq 2$

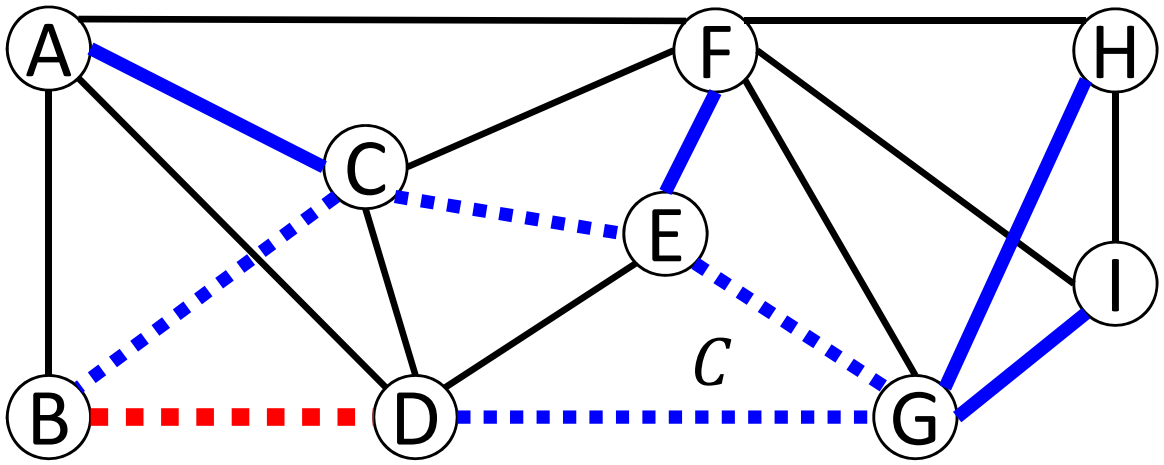
直観的な理解:
カットセット～川に懸かる橋, 閉路～一周するルート
一周するルートが川に懸かる橋を渡る
➔ 必ず別の橋を通って戻ってくる

証明: $(u,v) \in E(V',V'') \cap C,\ u \in V', v \in V''$ とする.
このとき, (u,v)と異なる枝が $E(V',V'') \cap C$ に含まれることを証明.
P = C - (u,v) は u と v を結ぶ路である.
$u \in V', v \in V''$ であるから, P にそって u から v に進むときの,
最後に通過する V' の頂点を s, その次の頂点を t とすると,
$t \in V''$ が成り立つ.
つまり, (s,t)∈E(V', V'') であり,
(s,t)∈ P = C - (u,v) なので (s,t)≠(u,v)

全域木に関する基本閉路

- 全域木 T へ，Tに含まれない枝 (u,v) をひとつ追加

➔ u と v の間には路が（ただ1つ）存在するので，
閉路が（ただ1つ）生じる（←T と (u,v) に関する基本閉路 とよぶ）



青い全域木（太い枝）と枝(B,D)に関する基本閉路
＝点線の枝集合

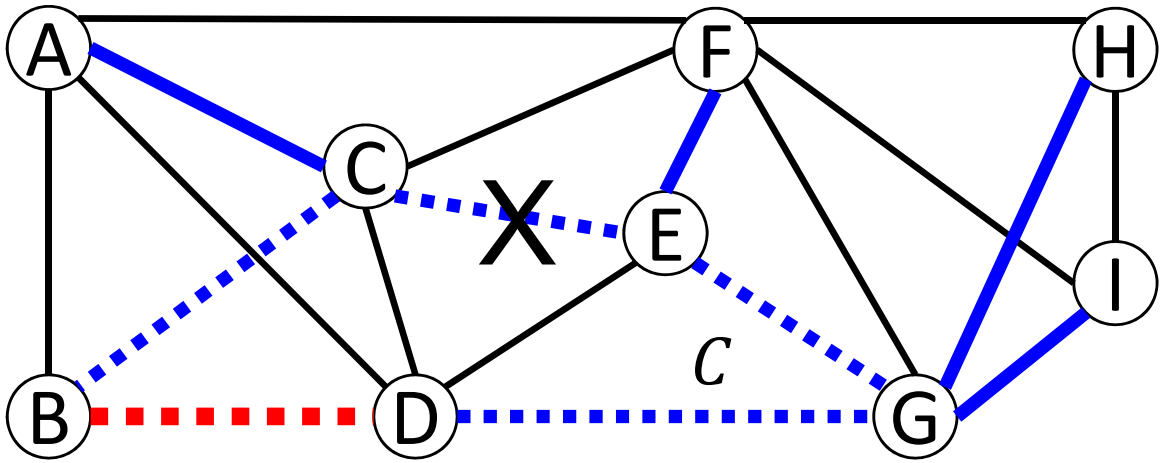
基本閉路と全域木

命題: 全域木 T, Tに含まれない枝 (u,v),
T と (u,v) に関する基本閉路の枝 (s,t) に対し,
T'=T+(u,v)-(s,t) は全域木になる

証明: 全域木の特徴付けに関する定理 [(1)⇔(5)] を使い,
T' が全域木であることを証明

枝数: |T'| = |T| = |V| - 1 が成立.

T+(u,v) の閉路は基本閉路のみ → (s,t) を削除するとなくなる
→ T' は閉路を含まない
∴T' は全域木



青い全域木(太い枝)に枝(B,D)を追加, (C,E)を削除 ➔新しい全域木

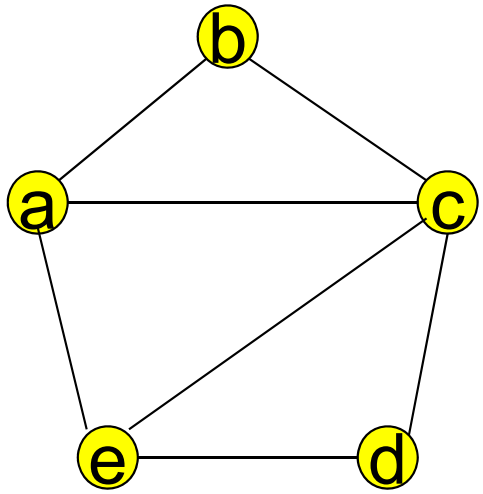
カットセットと最小全域木：証明

任意のカットセットの枝のうち，少なくとも1つは全域木に含まれる
→ カットセットの中で費用最小の枝を追加すると良い？ Yes!

定理:
$E(V', V'')$: 任意のカットセット
(u,v): カットセット$E(V', V'')$ の中で費用最小の枝
➔(u,v)を含む最小全域木T*が存在

証明： T: 任意の最小全域木 とする
（1）T が (u,v) を含む場合： T*=Tとすればよい
（2）T が (u,v) を含まない場合： Tと(u,v) に関する基本閉路 C は，
カットセットの枝(s,t)で(s,t)≠(u,v)なるものを必ず含む
（∵カットセットと閉路の関係）
➔T* = T + (u,v) – (s,t) もまた全域木 （∵基本閉路の性質）
(u,v) の選び方より，c(u,v)≦c(s,t) ➔ T*の費用≦Tの費用
∴T*もまた最小全域木

演習問題



問題１：右のグラフの全域木のうち，
枝 (a,b), (a,c) の両方を含むものを
すべて書け（ヒント：5個以上）

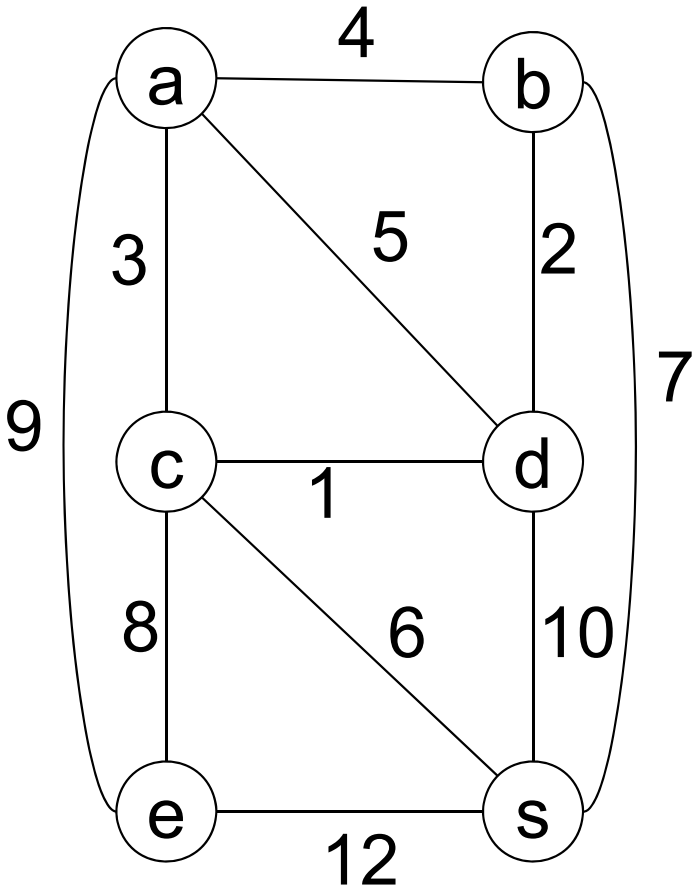
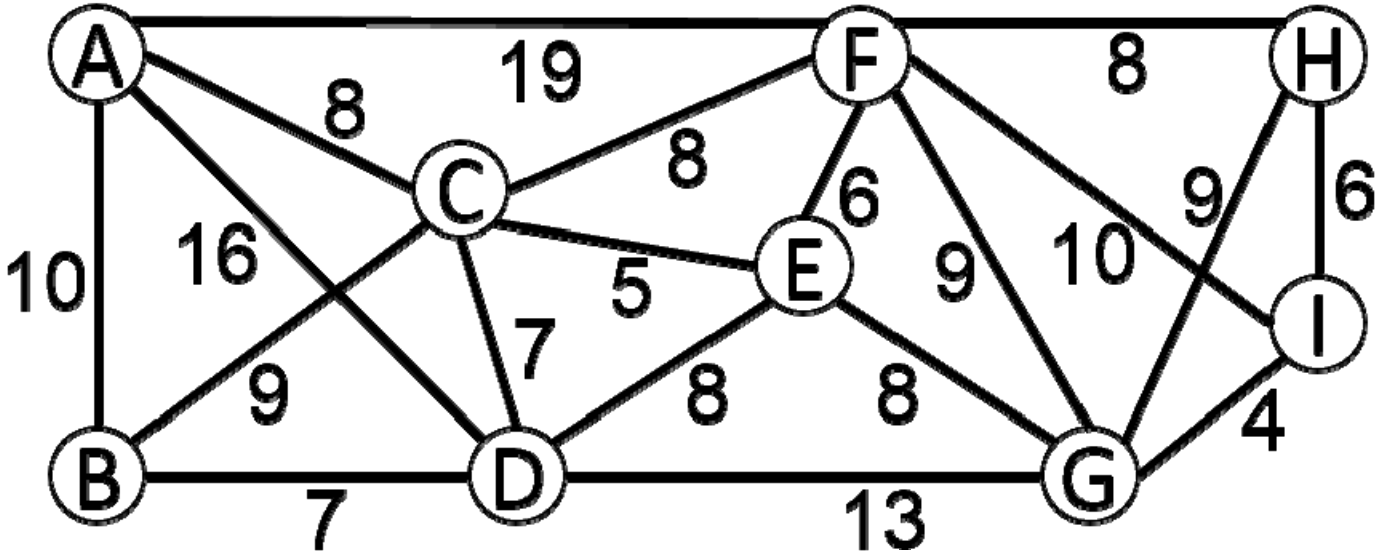
問題２：全域木の特徴付けに関する定理の5条件のうち，いずれかを選んで必要十分性を証明せよ．

例：(2) ⇔ (4) を証明するなど．

難しい場合は (2) ➔ (4) のみでも良い．全部証明したい場合は，

(1) ➔ (2) ➔ … ➔ (5) ➔ (1) の順番がおすすめ

問題３：「全域木の求め方その１」において，閉路が生じない理由を述べよ（ヒント：閉路ができたとすると，何らかの矛盾が生じる）

演習問題

問題4：次の2種類のグラフの
最小全域木を，プリムのアルゴリズムを
使って求めよ．根は適当に選んで良い