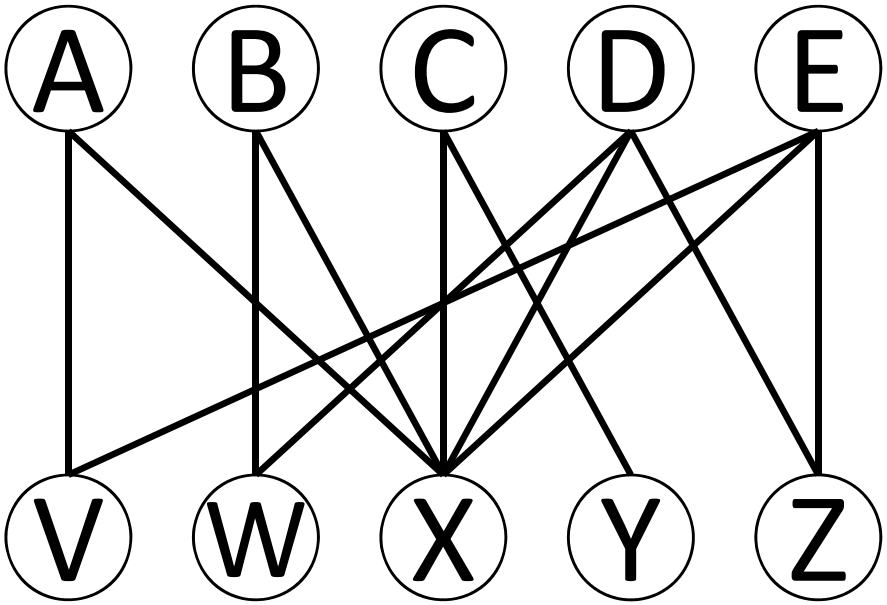
数理経済学
第3回
最大マッチング問題

塩浦昭義
東京工業大学 経営工学系准教授
shioura.a.aa@m.titech.ac.jp

マッチング問題

- マッチング問題：
  「ひと」や「もの」の間の最適なペアの集合を求める問題
- 例：労働者の仕事への割り当て
  - 5人の労働者 A, B, C, D, E,　5つの仕事 V, W, X, Y, Z
  - 各々の労働者は従事可能な仕事と不可能な仕事がある
  ➔ グラフで表現可能

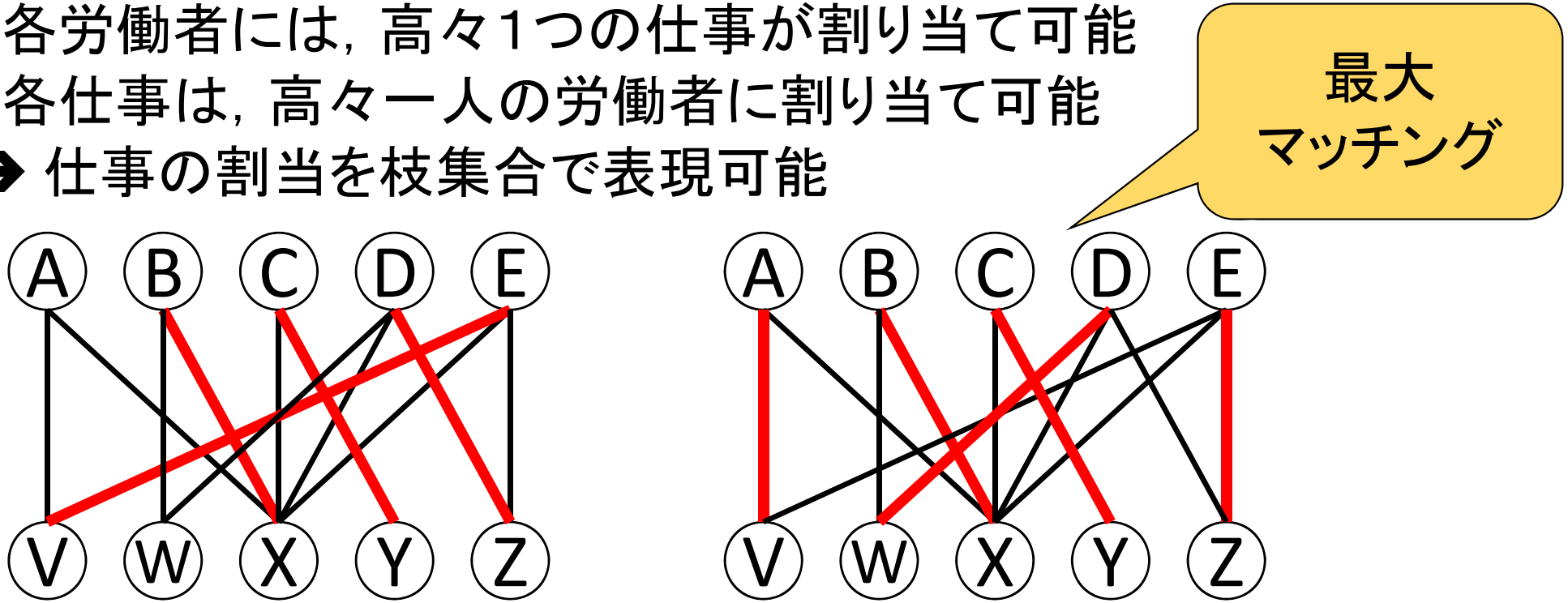


頂点の2つのグループ
V_1={A, B, …, E} と V_2={V, W, …, Z}
の間にのみ，枝が存在
🡐 二部グラフと呼ばれる

※2部グラフにおいて，V_1とV_2の頂点数は同じでなくても良い

最大マッチング問題

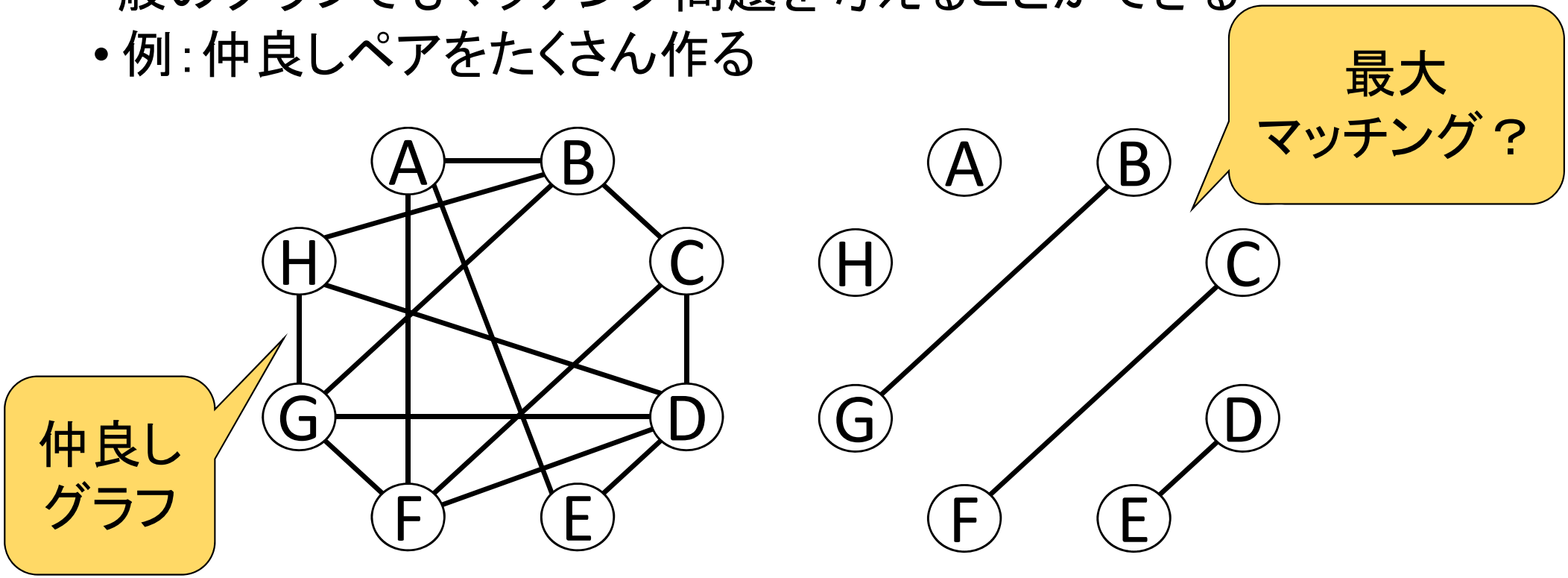
- できるだけ多くの労働者に仕事を割り当てたい
  - 各労働者には，高々1つの仕事が割り当て可能
  - 各仕事は，高々一人の労働者に割り当て可能
  - ➔ 仕事の割当を枝集合で表現可能



- グラフのマッチング：
  グラフの枝集合であって，各頂点に接続する枝の数（次数）が1以下
- 最大（サイズ）マッチング問題：
  与えられたグラフのマッチングの中で，枝数最大のものを求める

一般グラフのマッチング問題

- 一般のグラフでもマッチング問題を考えることができる
  - 例：仲良しペアをたくさん作る



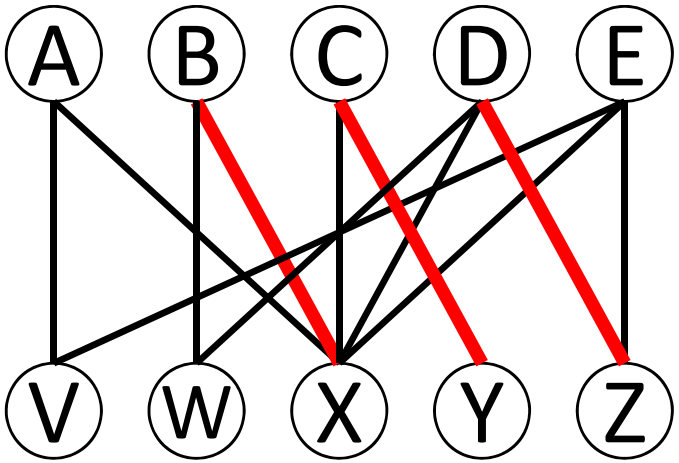
- グラフのマッチング：
  グラフの枝集合であって，各頂点に接続する枝の数（次数）が1以下
- 最大（サイズ）マッチング問題：
  与えられたグラフのマッチングの中で，枝数最大のものを求める

マッチングと交互路

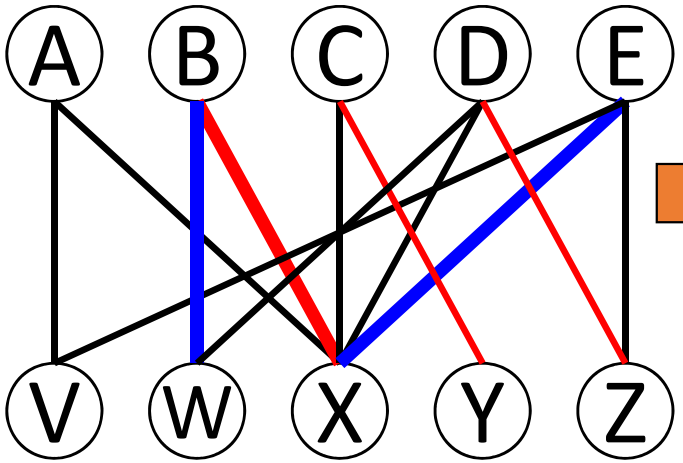
マッチングに関する交互路

交互路 – 新しいマッチングを作るための「道具」

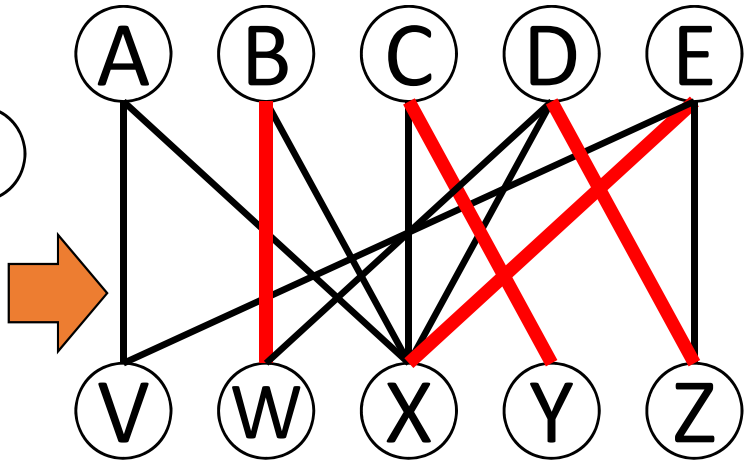
定義：マッチング Mに関する交互路
(i) Mの枝とM以外の枝が交互に現れる路
(ii) 路の最初の枝がM以外➔路の始点は，Mの枝の端点ではない
(iii) 路の最後の枝がM以外➔路の終点は，Mの枝の端点ではない



マッチング M



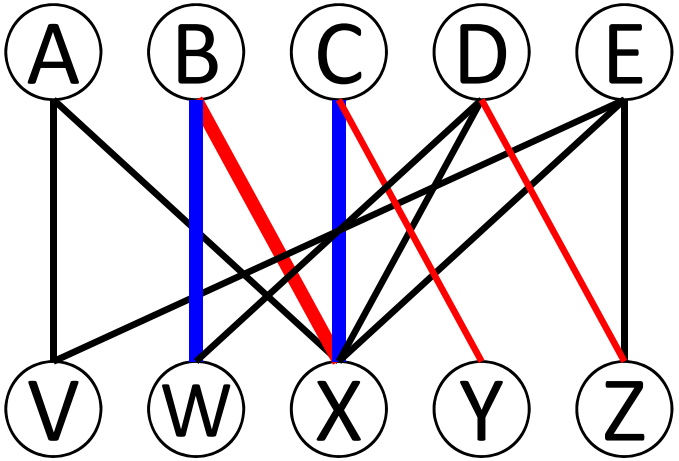
交互路

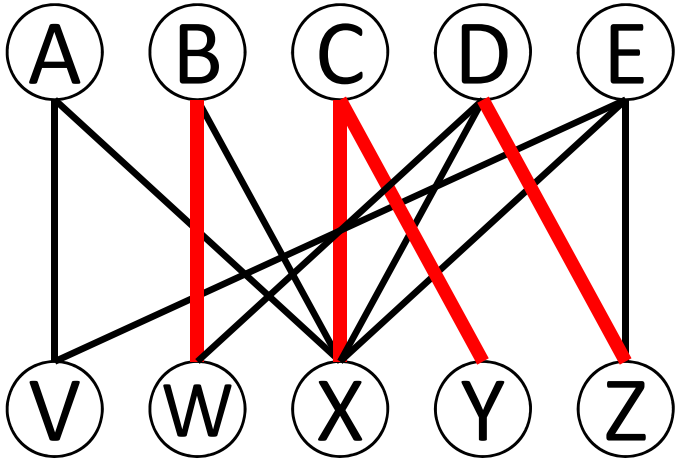


交互路を使って，
マッチングの枝を
入れ替えした結果

マッチングに関する交互路

交互路でない例

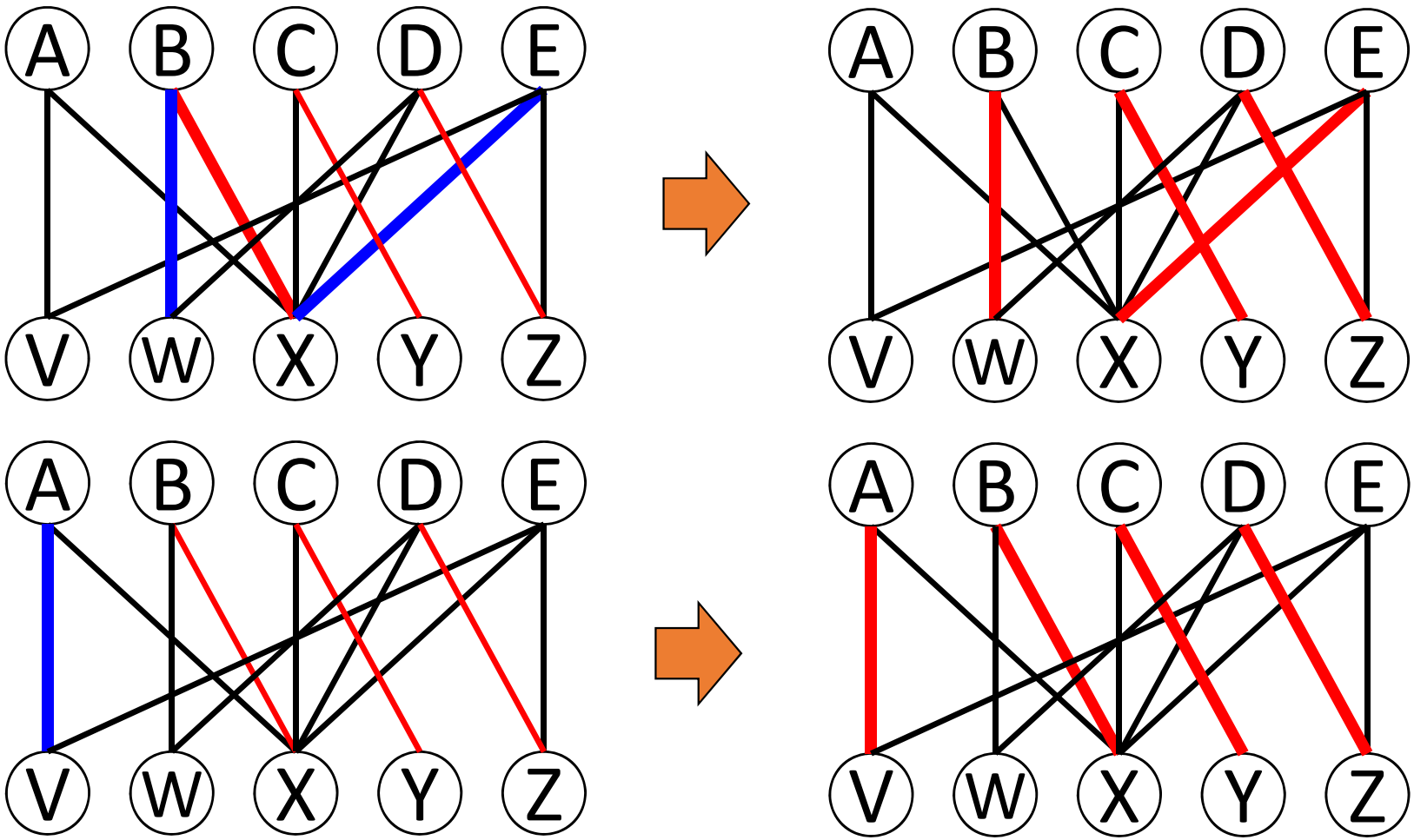




条件(ii)を満たさない
➔枝を入れ替えても
　マッチングにならない

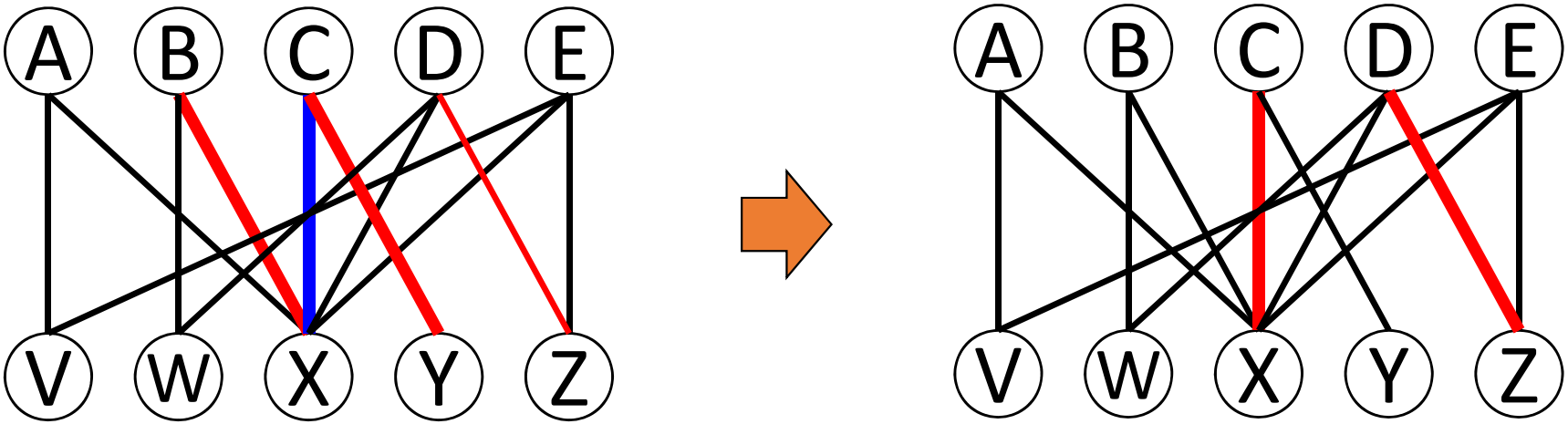
マッチングに関する交互路

交互路タイプ1：M以外の枝数＝Mの枝数＋1
（枝を入れ替えるとマッチングの枝数が1増える）
➔ 増加路と呼ばれる

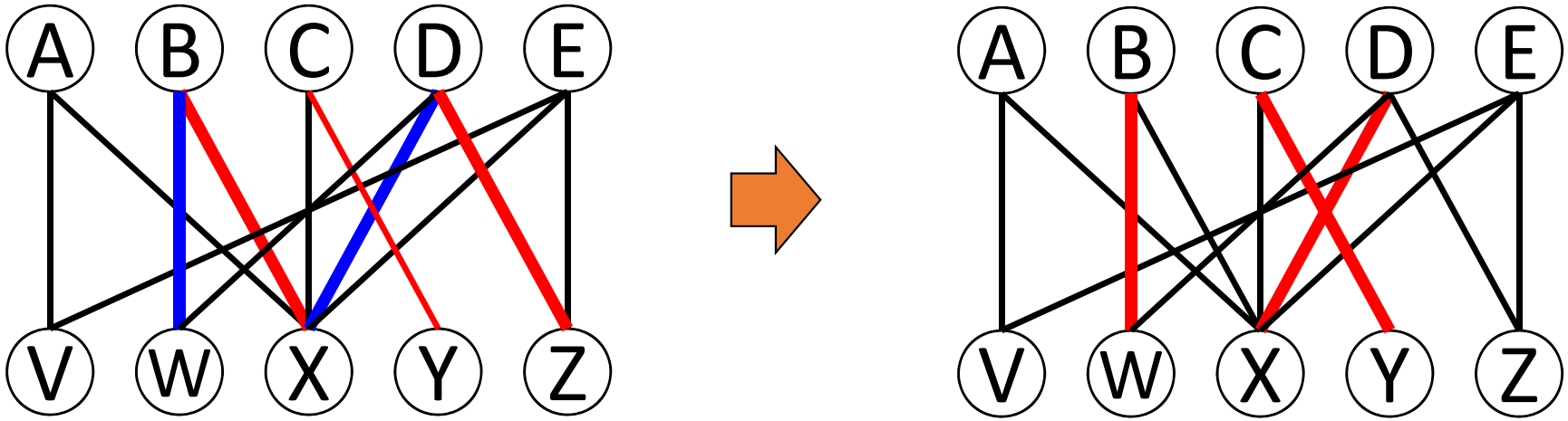


マッチングに関する交互路

交互路タイプ2：M以外の枝数＝Mの枝数−1
（枝を入れ替えるとマッチングの枝数が1減る）



交互路タイプ3：M以外の枝数＝Mの枝数
（枝を入れ替えても，マッチングの枝数は不変）

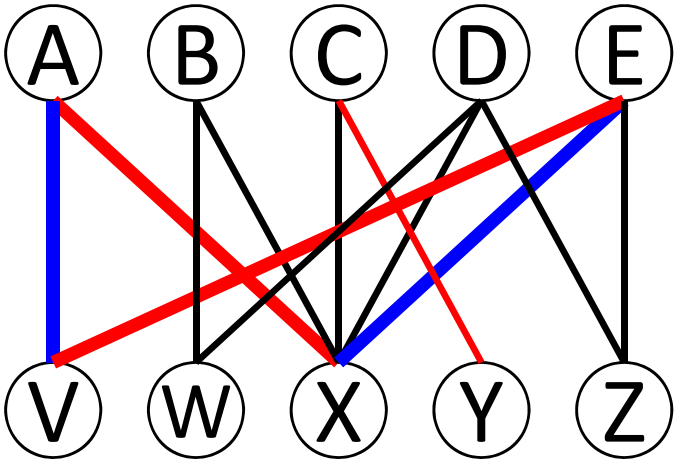


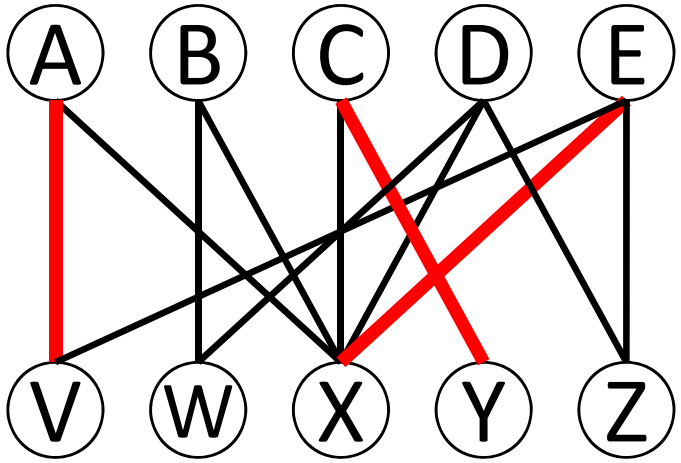
マッチングに関する交互閉路

定義：マッチング Mに関する**交互閉路**
＝Mの枝とM以外の枝が交互に現れる閉路

交互閉路では，「M以外の枝数＝Mの枝数」
➔枝を入れ替えても，マッチングの枝数は不変

交互閉路の例





交互路によるマッチングの更新

命題 マッチングMに対し,
路Pは(Mに関する)交互路
⇔Pを使ってMの枝を入れ替えると, 新しいマッチングM'ができる

$$M' = (M \setminus P) \cup (P \setminus M)$$

命題 マッチングMに対し,
Mに関する増加路が存在➔Mは最大マッチングではない
(対偶:Mは最大マッチング➔ Mに関する増加路が存在しない)

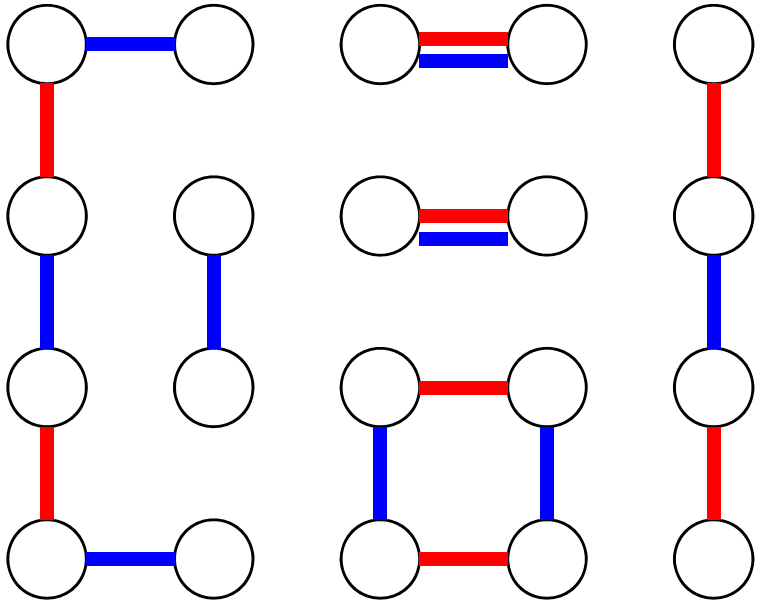
逆も成立する

命題 マッチングMに対し,
Mに関する増加路が存在⇐Mは最大マッチングではない
(対偶:Mは最大マッチング⇐ Mに関する増加路が存在しない)

交互路によるマッチングの最適性条件

命題 マッチングMに対し,
Mに関する増加路が存在 ← Mは最大マッチングではない
(対偶:Mは最大マッチング ← Mに関する増加路が存在しない)

(証明)Mは最大ではない ➔ |M*| > |M|を満たすマッチングをM*とおく
枝集合$(M^* \setminus M) \cup (M \setminus M^*)$に注目
➔ 幾つかの(Mに関する)
交互路・交互閉路からなる
(∵各頂点にはMの枝が高々1つ,
M*の枝が高々一つ, 接続しているから)
その中に, 増加路(タイプ1の交互路)が
必ず存在
(∵タイプ2, 3の交互路, 交互閉路は
いずれも「Mの枝数≦M*の枝数」
➔合計すると, |M*|≦|M|となり矛盾)



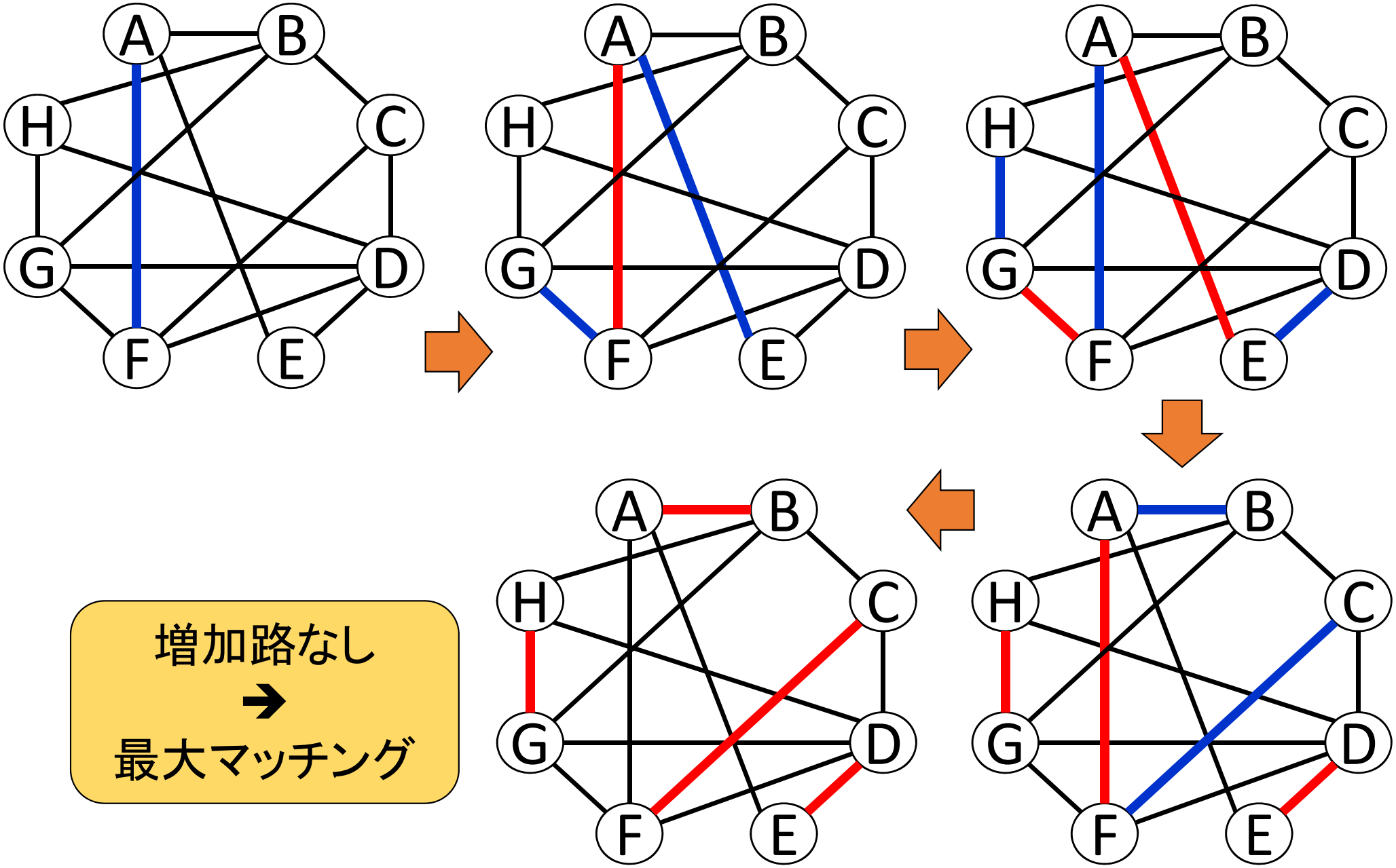
最大マッチングの計算

最大マッチング問題のアルゴリズム

「Mは最大マッチング🡐🡒Mに関する増加路が存在しない」
これに基づき，次のアルゴリズムが得られる

ステップ0：初期マッチングを$M := \emptyset$とする.
ステップ1： Mに関する増加路の存在をチェック.
存在しない🡒現在のMは最大マッチング（終了）
存在する🡒ステップ2へ.
ステップ2：Mに関する増加路 P をひとつ見つけ，
P を用いて M を更新（ $M := (M \setminus P) \cup (P \setminus M)$）
ステップ1へ.

アルゴリズムの実行例

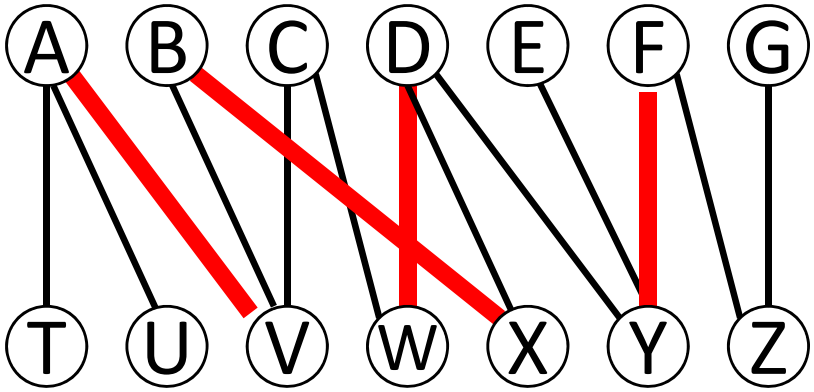


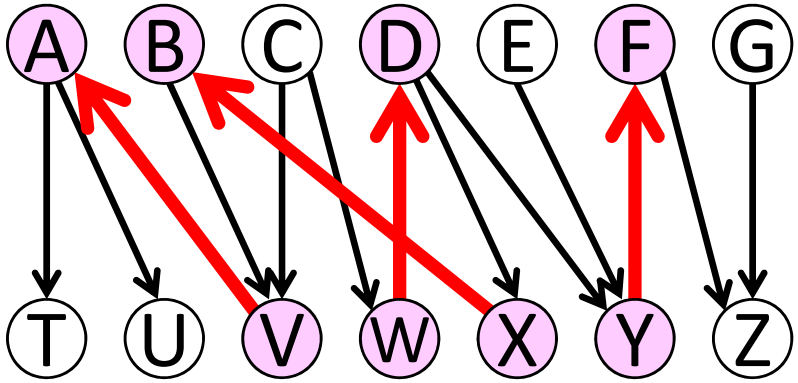
増加路なし
➔
最大マッチング

増加路の見つけ方：二部グラフの場合

- 増加路を見つける問題は，有向路を見つける問題に帰着できる
- 二部グラフの頂点集合が V_1, V_2 に分かれているとき，
  - マッチングMの枝は，V_2 の頂点から V_1 の頂点に向き付け
  - それ以外の枝は，V_1 の頂点から V_2 の頂点に向き付け
- V_1 の頂点のうち，
  - マッチングの枝が接続している頂点の集合→U_1
  - 残りの頂点の集合→T_1
- U_2, T_2 も同様に定義

ピンクの頂点：U_1とU_2
白い頂点：T_1とT_2



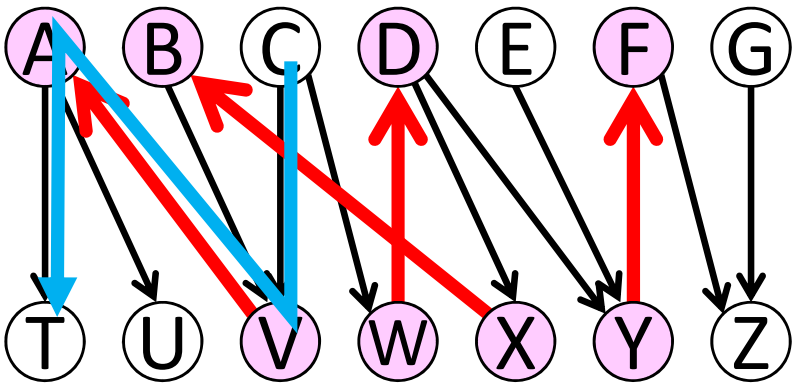


増加路の見つけ方：二部グラフの場合

- 新しい有向グラフにおける T_1 の頂点から T_2 の頂点への有向路
  ←→元の二部グラフの（Mに関する）増加路

∴有向グラフにおいて，上記のような有向路を求めればよい
（有向路を見つける効率的なアルゴリズムは幾つか存在）

ピンクの頂点：U_1 と U_2
白い頂点：T_1 と T_2



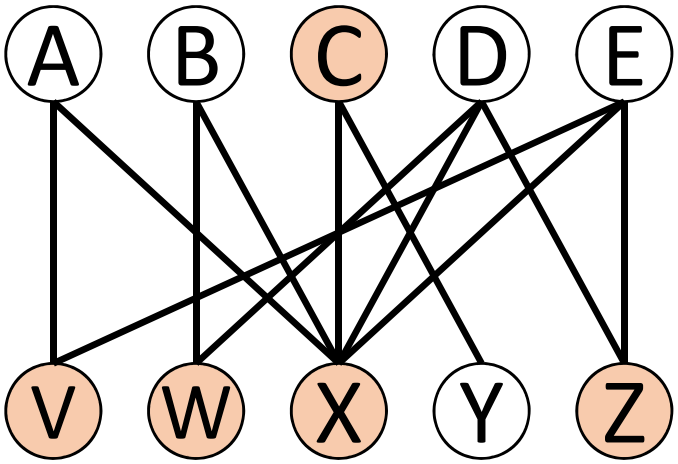
一般のグラフでも，
増加路の計算は
「効率的」に
できる，
でも計算方法は
かなり複雑

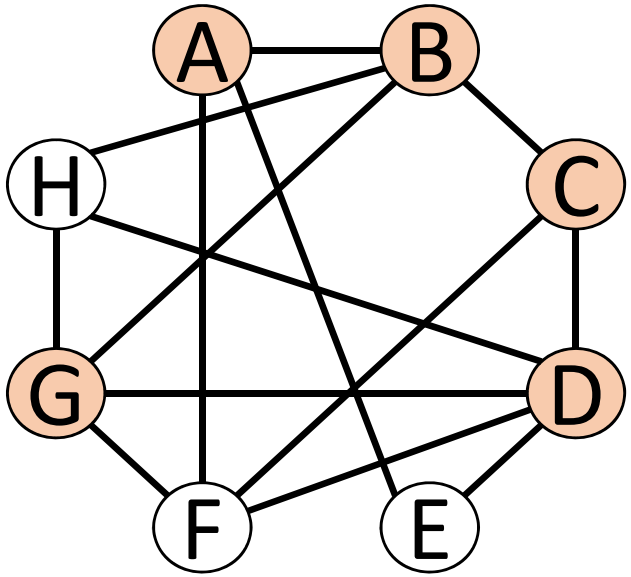
最大マッチング最小被覆定理

グラフの頂点被覆

- マッチングが最大でない証拠は？→増加路
- マッチングが最大である証拠は？

定義：グラフの頂点集合Sは頂点被覆
←→グラフの各枝(u,v)に対し $u \in S$ または $v \in S$
（$u, v \in V \setminus S$ となる枝(u,v)が存在しない）

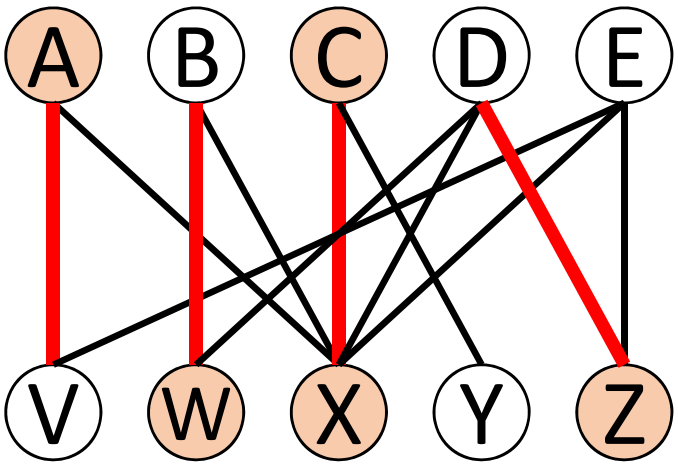


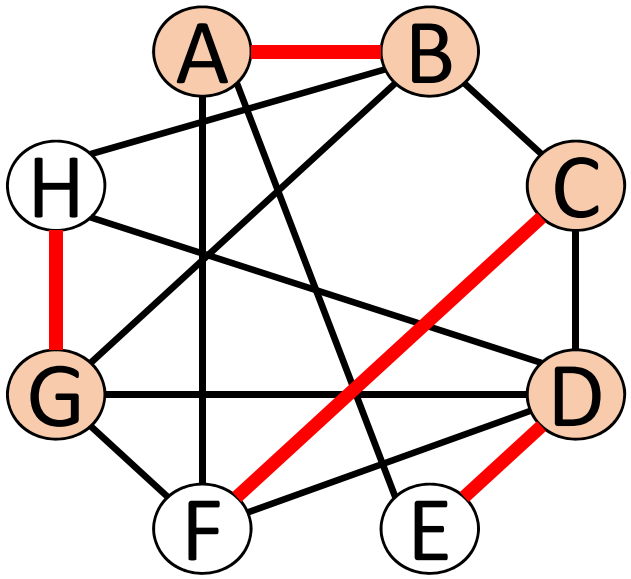


頂点被覆とマッチング

- マッチングM, 頂点被覆 S に注目
- 各マッチング枝は, S の異なる頂点に接続

命題　任意のマッチングMと頂点被覆 Sに対し,　|M|≦|S|





系　任意のマッチングMと頂点被覆 Sに対し,
|M|＝|S|　➔ M は最大マッチング（S は頂点数最小の被覆）

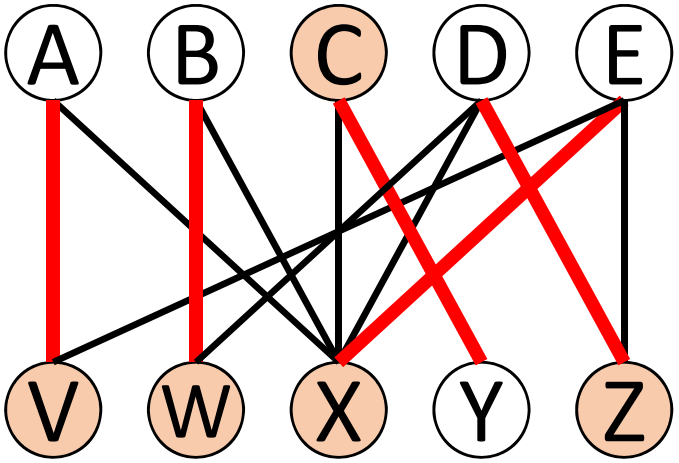
最大マッチング最小被覆定理

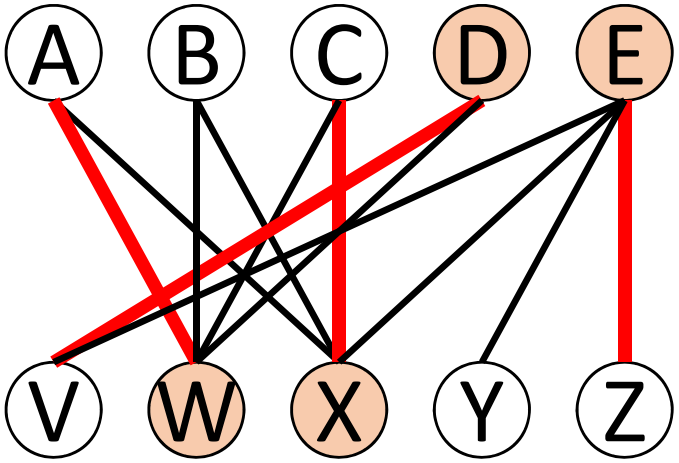
一般のグラフでは
成り立たない

最小（頂点）被覆＝頂点数最小の頂点被覆

定理（最大マッチング最小被覆定理，Kőnig（ケーニグ）の定理）
二部グラフにおいて，
最大マッチングの枝数＝最小頂点被覆の頂点数

証明は後日





最小頂点被覆の求め方

- 最大マッチング M を利用（すでに計算済みとする）

ステップ0: $S := \emptyset$ とする.

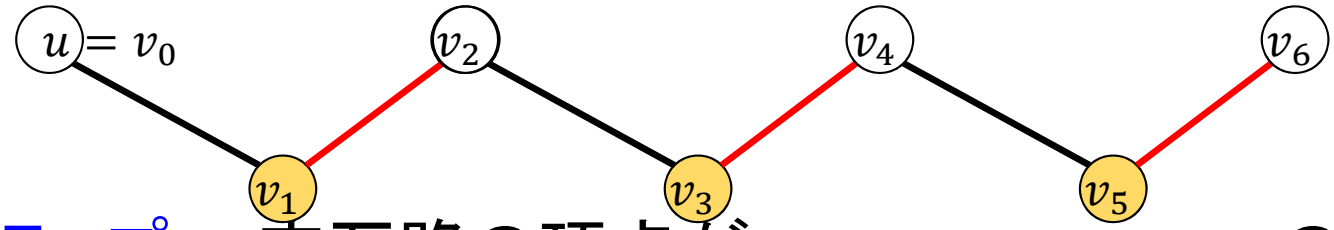
ステップ1: 残っているすべての頂点に M の枝が接続

➔ 残っている頂点のうち, V_1 に含まれるものを S に追加

➔ Sは最小頂点被覆（終了）

ステップ2: M の枝が接続していない頂点 u をひとつ選ぶ.

ステップ3: u を端点とする交互路を見つける(←枝数は必ず偶数になる)



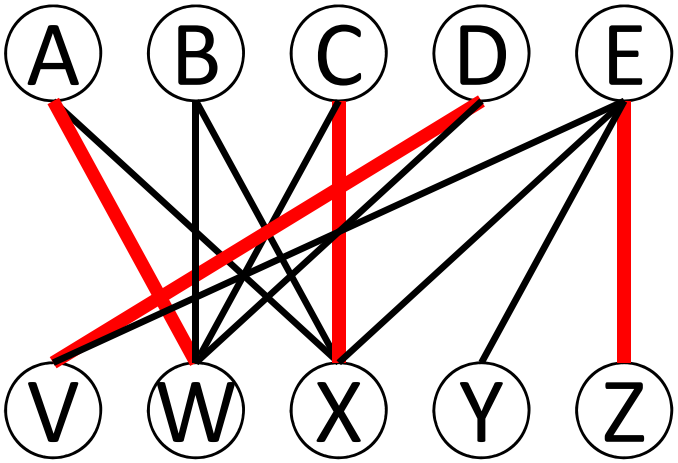
ステップ4: 交互路の頂点が v_0=u, v_1, v_2, …, v_{2k} のとき,

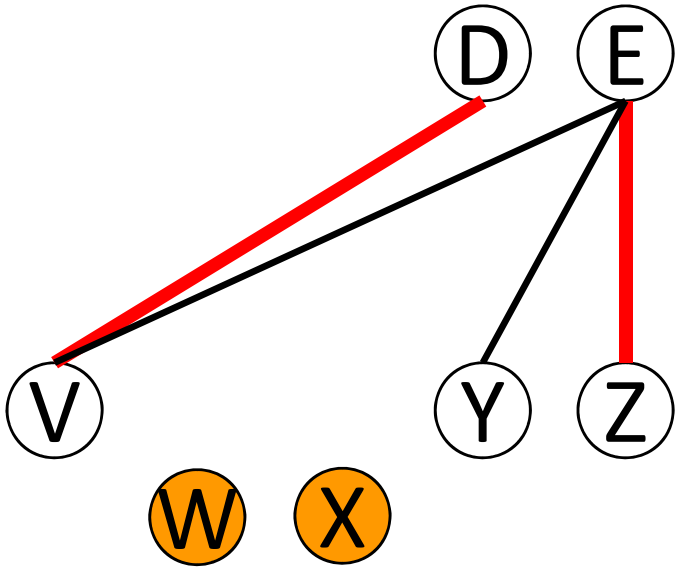
奇数番目の頂点 v_1, v_3, …, v_{2k-1} をSに追加,

Sに追加した頂点およびそれらに接続する枝を削除.

枝が接続しない頂点があったら削除.　ステップ1へ.

最小頂点被覆の求め方:実行例

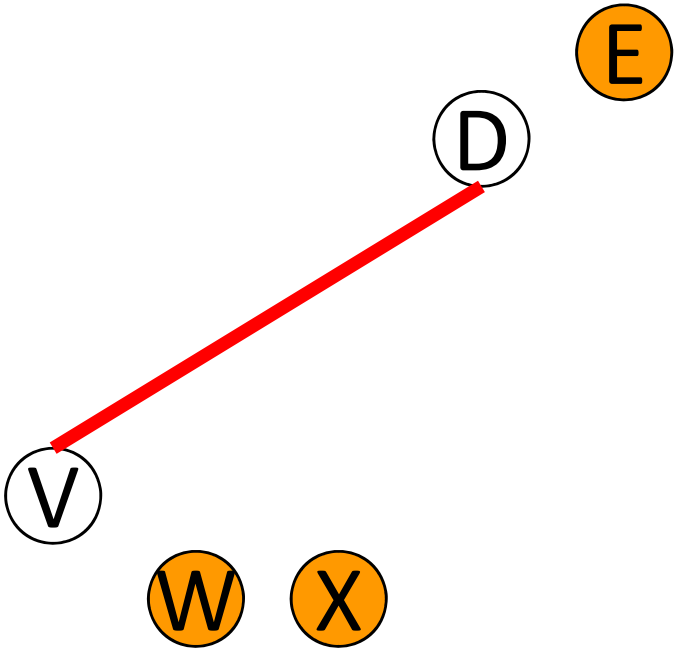




ステップ0: $S = \emptyset$
ステップ2: M の枝が接続していない頂点 → B
ステップ3: Bを端点とする交互路→ B, X, C, W, A
ステップ4: S={X, W}, 枝を削除
頂点A, B, C も削除

ステップ2: M の枝が接続していない頂点 → Y
ステップ3: Yを端点とする交互路→ Y, E, Z
ステップ4: S={X,W,E}, 枝を削除
頂点Y, Z も削除

最小頂点被覆の求め方：実行例



ステップ1：
各頂点に M* の枝が接続
➔ S= {X, W, E, D}
は最小頂点被覆

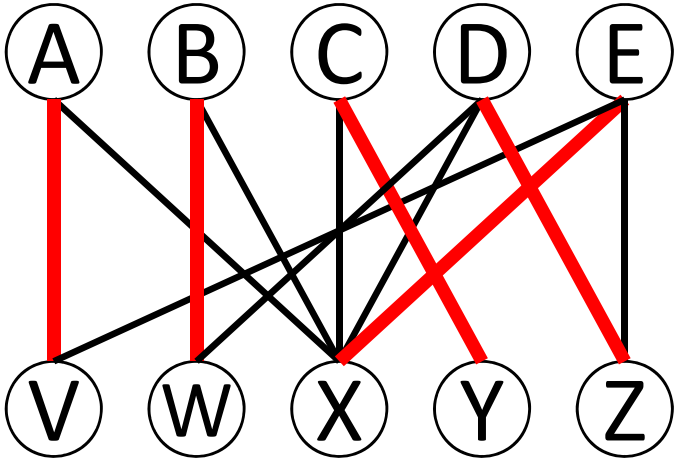
アルゴリズムが最小頂点被覆を求めることの証明（概略）：
最後に得られたSに対し，以下を示せば良い
(1) Sの頂点数＝|M*| (∵ Sに頂点を追加する度にM*の枝が1本削除)
(2) S は頂点被覆 (∵Sに頂点を追加する度に，接続する枝を削除)

ホールの定理

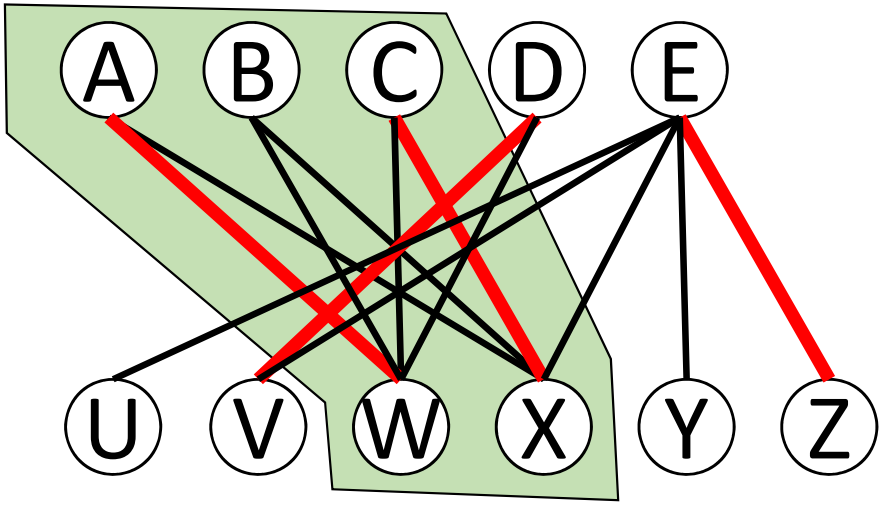
全員への割当可能性の判定

労働者全員に仕事を割り当てることができるか？

{A,…,E}全員に割り当て可能



Bには割り当てなし
➔割当方法を修正して，
全員に割り当てられるか？



命題

ある労働者の集合に対し，
「その労働者に割当可能な
仕事の数＜労働者の数」
➔ 全員への割当は不可能

A,B,Cに割当可能な仕事 = {W,X}
∴A,B,C全員に仕事を
割り当てることは不可能

ホールの定理

マッチングの言葉での言い換え:

頂点集合$V_1 \cup V_2$の二部グラフにおいて,

V_1の頂点全てに接続するマッチングが存在するか？

命題　ある$X \subseteq V_1$に対し,「|X| ＞ Xに隣接するV_2の頂点数」
➔ V_1の頂点全てに接続するマッチングは存在しない
(対偶: V_1の頂点全てに接続するマッチングが存在
➔ 任意の$X \subseteq V_1$に対し,　「|X| ≦ Xに隣接するV_2の頂点数」)

逆も成り立つ

定理 (Hall (ホール)の定理)
二部グラフにおいて,
V_1の頂点全てに接続するマッチングが存在
⟷ 任意の$X \subseteq V_1$に対し,　|X| ≦ Xに隣接するV_2の頂点数

ホールの定理：証明

[➔] V_1の頂点全てに接続するマッチングMが存在

$V_1 = \{u_1, \dots, u_n\}$, $M = \{(u_1, v_1), \dots, (u_n, v_n)\}$ とおく

任意の$X = \{u_{i_1}, u_{i_2}, \dots, u_{i_k}\} \subseteq V_1$に対し,

$\{v_{i_1}, v_{i_2}, \dots, v_{i_k}\}$はXに隣接　∴ |X| ≦ Xに隣接する$V_2$の頂点数

[🡐] 最大マッチング最小被覆定理をつかう

「V_1が最小被覆」と仮定➔最大マッチングの枝数= $|V_1|$

➔最大マッチングはV_1の頂点全てに接続する

以下，V_1が最小被覆であることを証明すればよい

ホールの定理：証明（続き）

任意の頂点被覆 S に対し，$|S| \geqq |V_1|$ を示す

$S_1 = S \cap V_1, S_2 = S \cap V_2,\ V_1' = V_1 \setminus S_1$ とおく

$u \in V_1'$ に接続する枝(u,v)は S_1 で

被覆されない➔$v \in S_2$

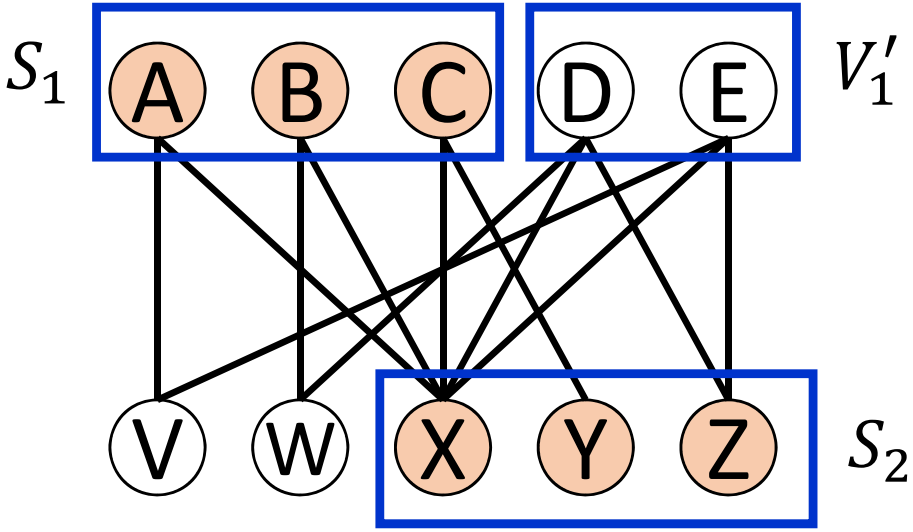
$\therefore V_1'$に隣接するV_2の頂点$\subseteq S_2$

仮定より，

$|V_1'| \leq V_1'$に隣接するV_2の頂点数

$\leq |S_2|$

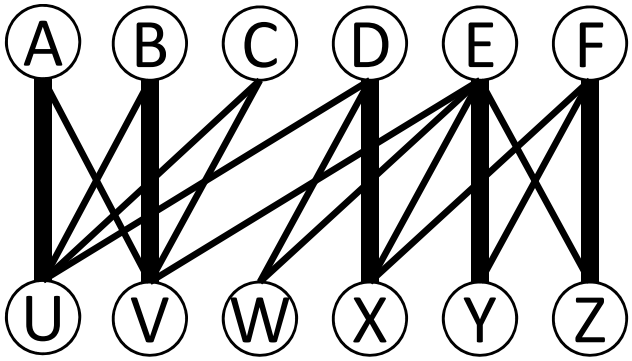
$\therefore |S| = |S_1| + |S_2| \geq |S_1| + |V_1'| = |V_1|$



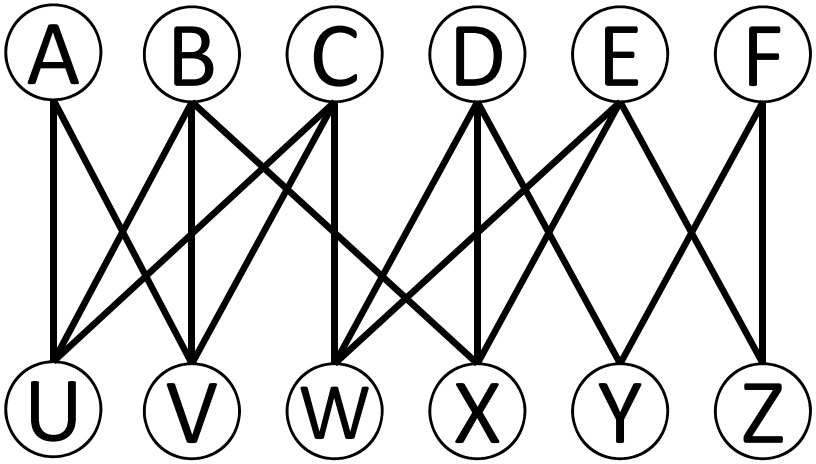
演習問題

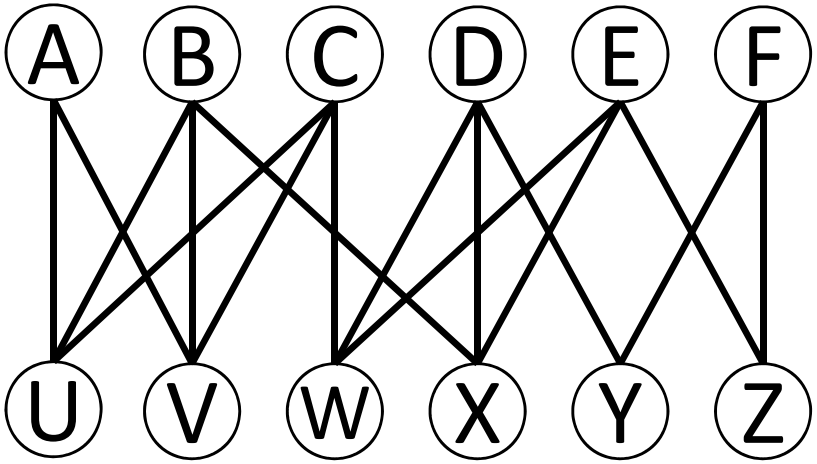
問1: 次ページのグラフの最大マッチングを，スライド14のアルゴリズムにより求めよ．各反復でのマッチングと使った増加路を（図を使って）明記すること．
（増加路の求め方は説明する必要なし）

問2: 右のグラフおよび最大マッチング（太線）を利用して，最小頂点被覆を求めよ．

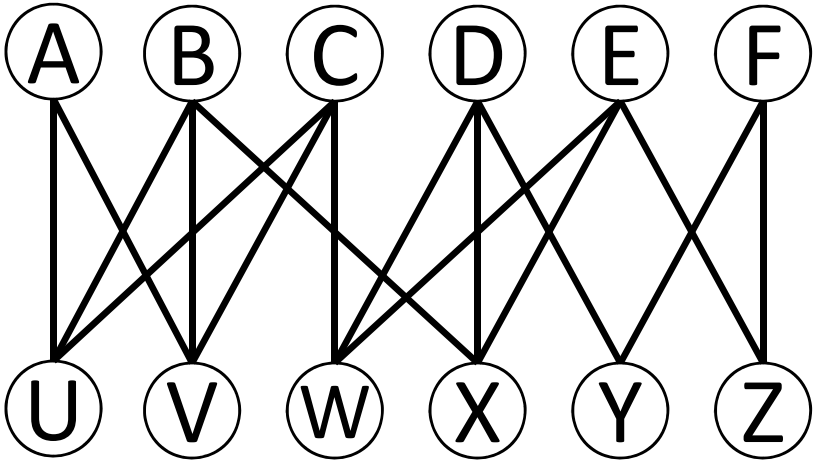


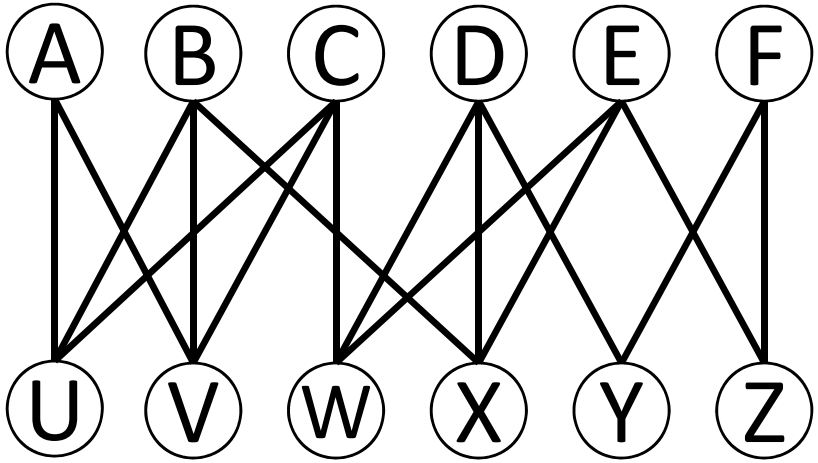
問3: 最大マッチングの枝数と，最小頂点被覆の頂点数が一致しないグラフの例を1つ挙げよ（ヒント: 頂点数≦4の例がある）

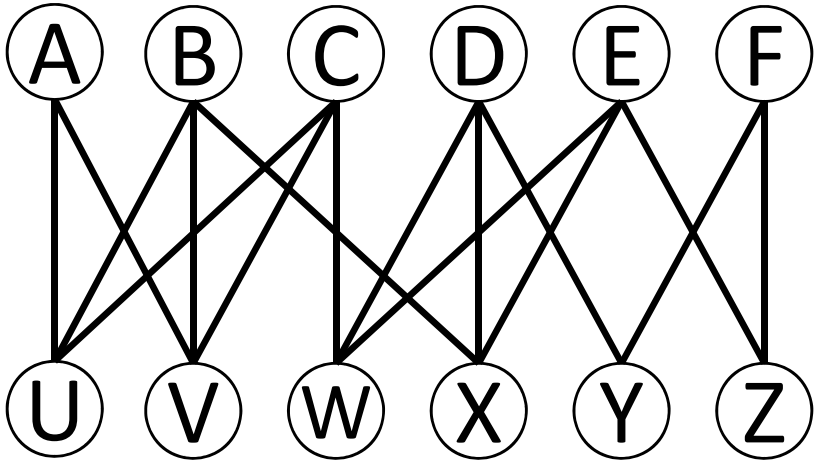

A B C D E F
U V W X Y Z

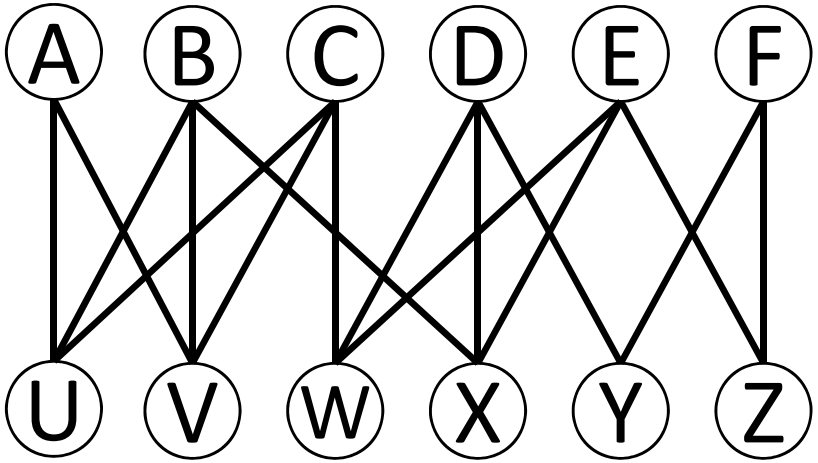

A B C D E F
U V W X Y Z

問1


A B C D E F
U V W X Y Z


A B C D E F
U V W X Y Z


A B C D E F
U V W X Y Z


A B C D E F
U V W X Y Z