

2017年度 数理経済学  
第1回  
ガイダンス, 最短路問題

塩浦昭義

東京工業大学 経営工学系 准教授

shioura.a.aa@m.titech.ac.jp

<http://www.soc.titech.ac.jp/~shioura/teaching>

# この講義の目的

- × 「数理経済学」を学ぶ  
(経済の数理モデルを作り、数学的に解析する分野)
- 経済・経営工学に役立つ数理を学ぶ

より具体的には. . .

- **離散的な最適解・安定解**を求める問題を紹介
  - 経済では、連続的な財だけでなく、離散的な財も扱う！
- 問題の数理構造、アルゴリズムを説明
- 経済学・経営工学との繋がりを紹介

# 今後の予定

- ・最短路問題
- ・最大要素マッチング問題
- ・最大重みマッチング問題
- ・最小全域木問題
- ・資源配分問題
- ・最大流問題
- ・最小費用流問題

最適解を  
求める

7月7日(金)あたりに  
中間試験

- ・ナップサック問題
- ・巡回セールスマン問題

近似解を  
求める

8月上旬に  
期末試験

- ・財の交換問題
- ・安定マッチング問題
- ・安定マッチング問題の拡張

安定解を  
求める

# 授業の進め方

- ・毎回の授業の流れ
  - 前回授業のレポートの解説→講義 →レポート問題の出題
- ・レポートは授業中に各自で採点後, 提出してもらいます
  - ・レポート提出は義務ではなく, 任意.
  - ・問題の解答が**不完全でも良い**ので, なるべく提出すること
- ・授業資料はOCWに置きます(OCW-iではない)
- ・質問したい場合は, 授業前後, メール(簡単な質問)  
または研究室(とくに成績に関する問合せ)にて

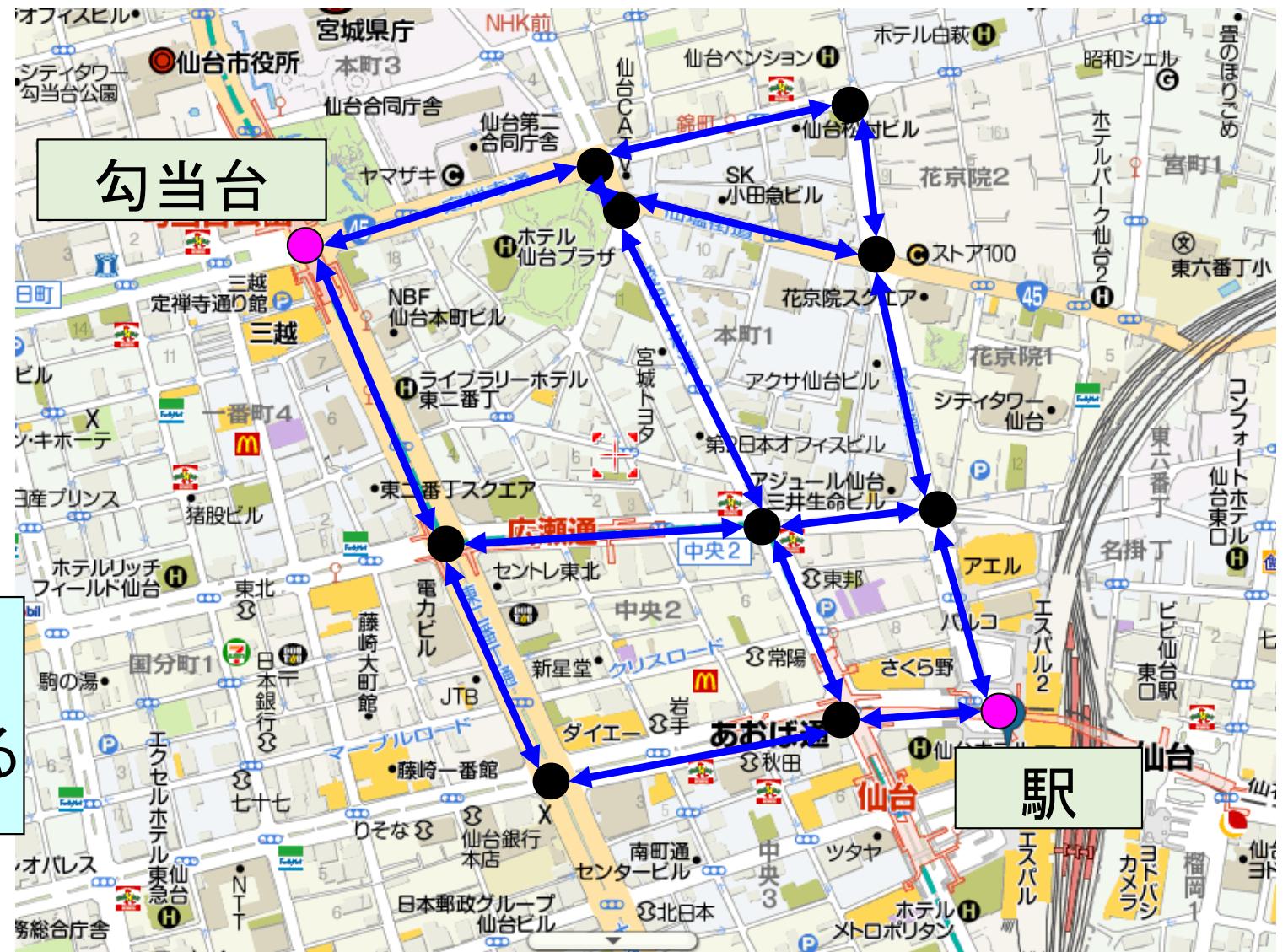
# 成績の評価方法

- ・中間50点+期末50点 + レポートの提出状況20~30点  
→ 100点で打ち切り
  - ・全体で59点以下は不合格
- ・中間試験および期末試験の出来が悪くても不合格
  - ・それぞれ50点満点
  - ・26点以上合格
  - ・25点以下は原則不合格

# 最も短い経路を求める

駅から  
勾当台までの  
最短経路を  
求めたい  
→グラフを使って  
モデル化

各頂点の間に距離  
(移動時間)を与える



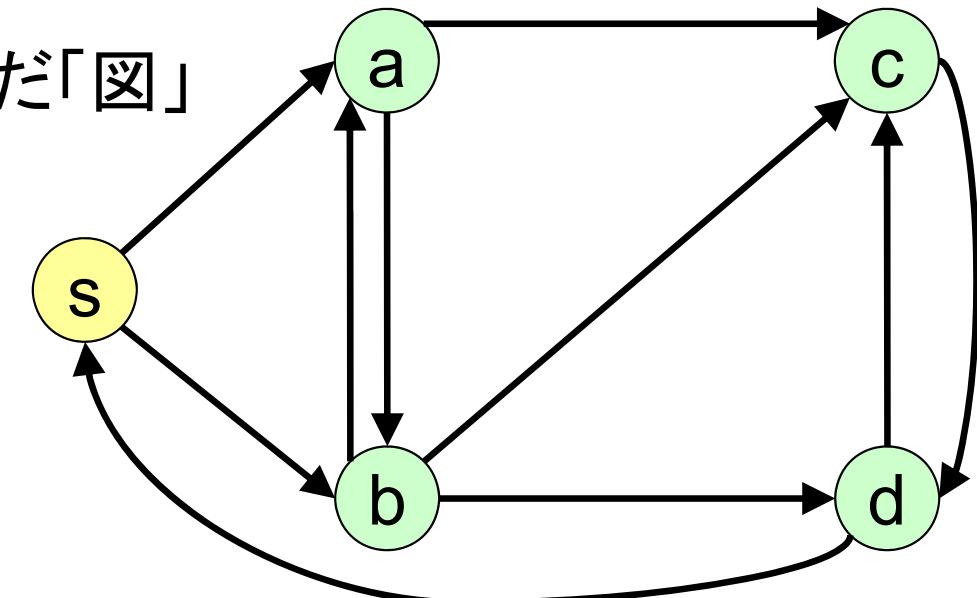
# グラフ

最短路問題を数学的に表現するために使う

- 定義: グラフ = 「丸」を「線」で結んだ「図」
  - 頂点 = 「丸」, 枝 = 「線」

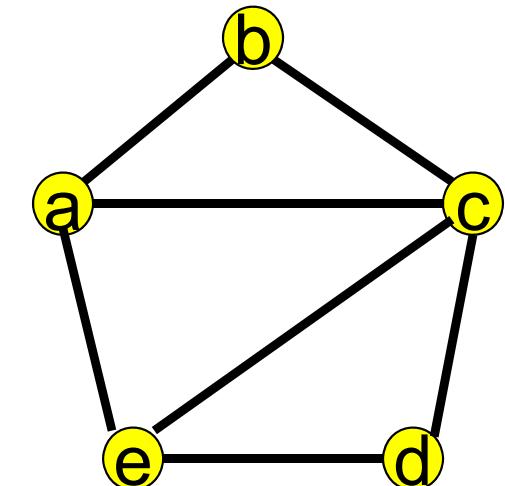
グラフの例

- 友人関係の図
- 鉄道路線図, 道路網
- 組織図, 家系図



**有向グラフ:** 枝に向きの付いたグラフ

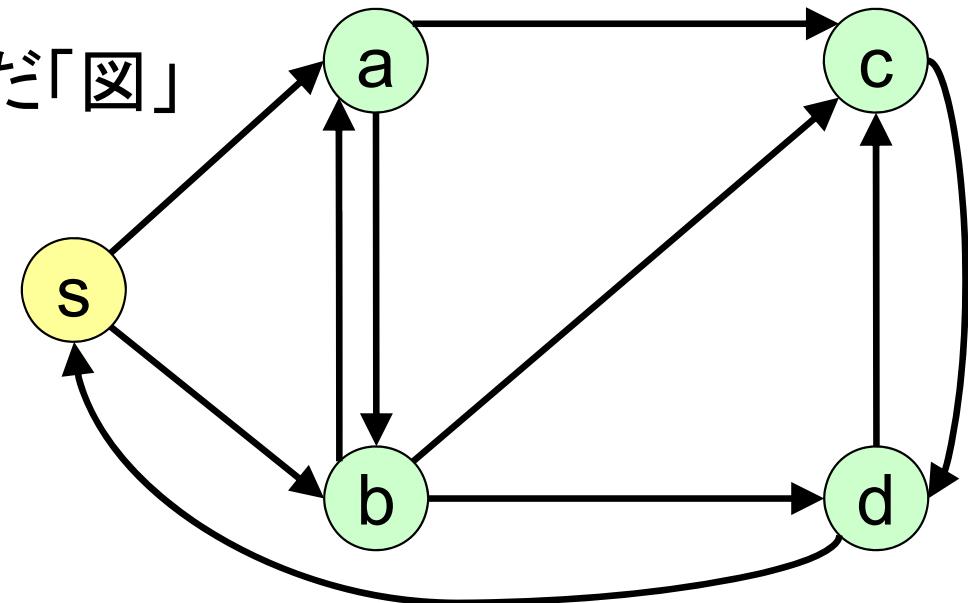
**無向グラフ:** 枝の向きの付いていないグラフ



# グラフ

最短路問題を数学的に表現するために使う

- 定義: グラフ = 「丸」を「線」で結んだ「図」
  - 頂点 = 「丸」, 枝 = 「線」



※数学的には、グラフ  $G = (V, E)$  は  
全頂点の集合  $V$  と全枝の集合  $E$  の対として表現  
各枝  $(u, v) \in E$  は頂点の(順序)対として表現

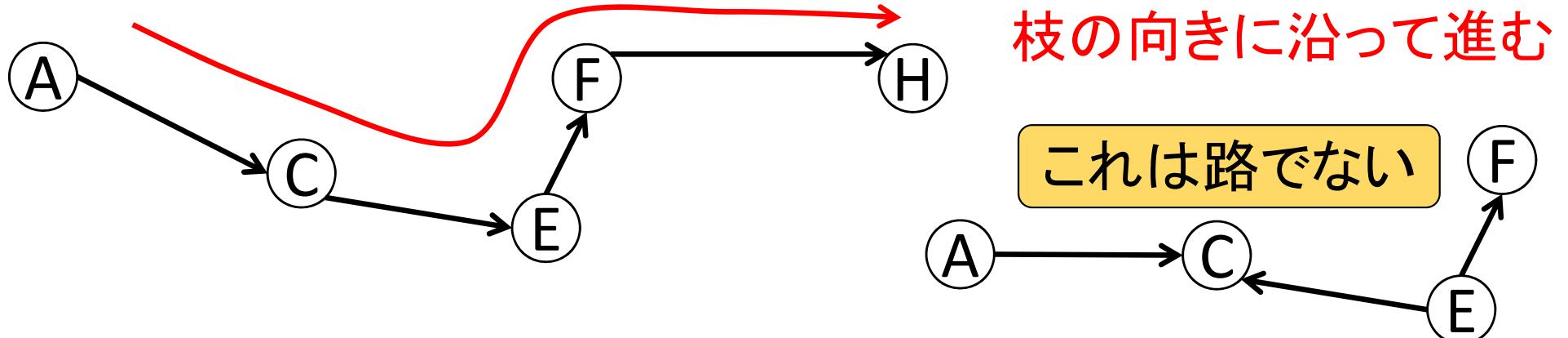
上記のグラフの場合、

すべての頂点の集合  $V = \{s, a, b, c, d\}$

すべての枝の集合  $E = \{(s, a), (a, b), (b, a), (b, d), \dots\}$

# 路と閉路

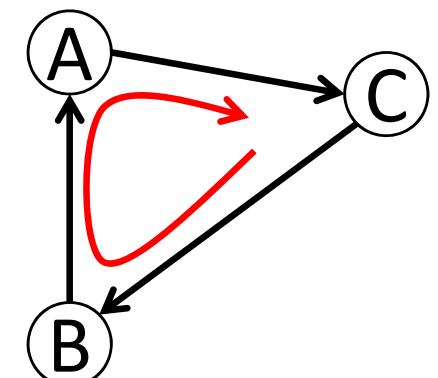
- 路(みち)(path, パス) = 複数の枝が1つにつながったもの



厳密な定義: 枝の列  $(u_1, v_1), (u_2, v_2), \dots, (u_k, v_k)$   
ただし  $v_1 = u_2, v_2 = u_3, \dots, v_{k-1} = u_k$

- 閉路(cycle, サイクル) = 複数の枝が1つの輪になったもの

厳密な定義: 枝の列  $(u_1, v_1), (u_2, v_2), \dots, (u_k, v_k)$   
ただし  $v_1 = u_2, v_2 = u_3, \dots, v_{k-1} = u_k$   
 $v_k = u_1$



# (单一始点全終点)最短路問題

- ・入力: 有向グラフ  $G=(V, E)$

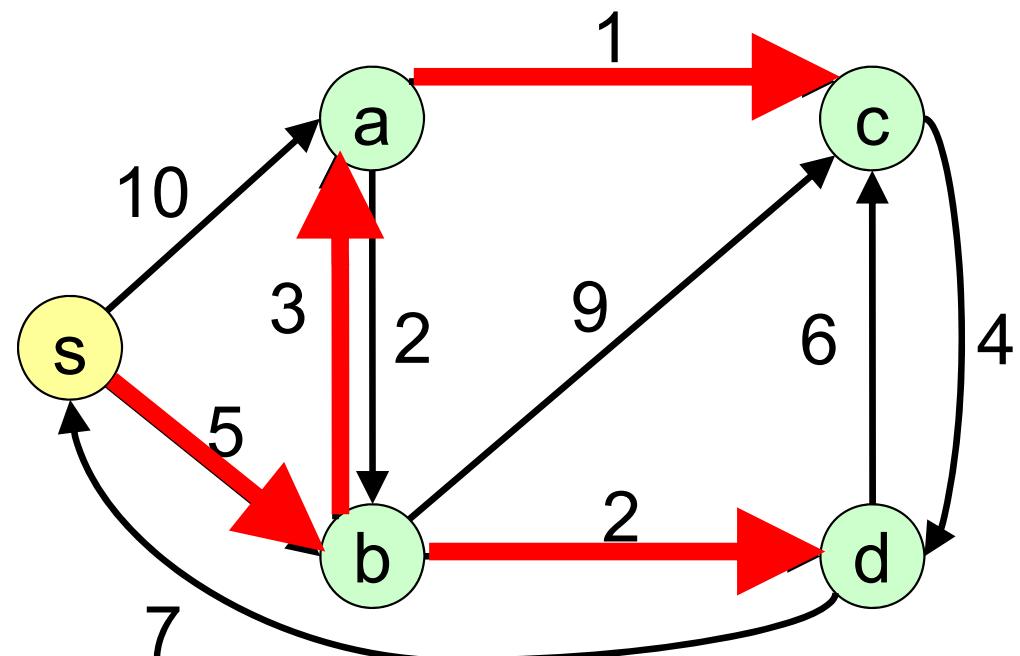
各枝の長さ  $\ell(e)$  ( $e \in E$ ), 始点  $s \in V$

枝の長さが  
負の場合も扱う

- ・出力:  $s$  からすべての頂点  $v$  への最短路  $P(v)$  とその長さ  $d(v)$

( $s$  から  $v$  への最短路  $P^*$

=  $s$  から  $v$  への路のうち, 枝の長さの和  $\ell(P^*)$  が最小のもの)



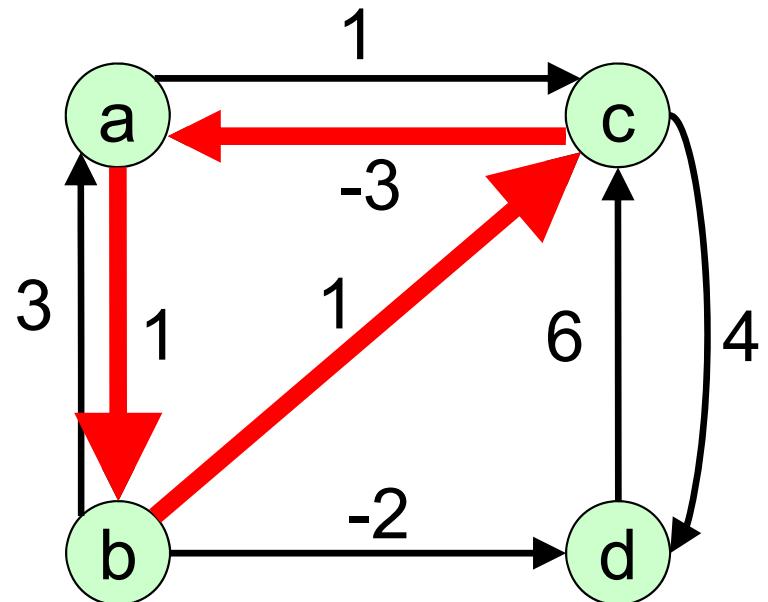
以降で使う仮定:

$s$  から各頂点  $v$  への路が存在  
(存在しない場合は  
枝  $(s, v)$  を追加, その長さを  
十分大きい正数とする)

注意: 路は, 同じ頂点,  
同じ枝を何回通っても可

# 関連する問題: グラフの負閉路の検出

- ・入力: 有向グラフ  $G=(V, E)$   
各枝の長さ  $\ell(e) (e \in E)$
- ・出力: グラフに負閉路が「存在する」または「存在しない」の答え  
存在するときは、負閉路を求める  
(**負閉路** = 閉路のうち、枝の長さの和が負のもの)



# 応用: 通貨両替の問題(鞘取, さやとり)

- 手持ちのお金をうまく両替して、儲けることは可能か？

入力: 各国の通貨(JPY, EUR, USD, GBPなど)

通貨の両替レート(1USD=120JPYなど)

出力: 手持ちのお金を増やす両替方法は存在するか？

from\to	100JPY	EUR	USD	GBP
100JPY	1	0.76	0.82	0.55
EUR	1.3	1	1.1	0.70
USD	1.2	0.9	1	0.65
GBP	1.8	1.4	1.5	1

100 JPY  
 →0.76 EUR  
 →0.76x1.1 USD  
 →0.76x1.1x1.2  
 =100.32 JPY

# 応用: 通貨両替の問題(続き)

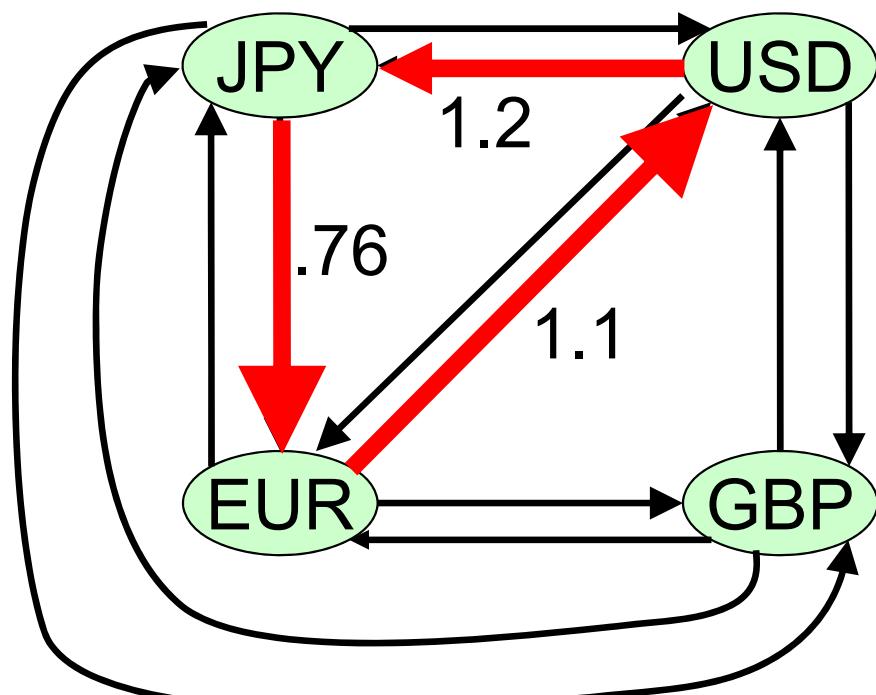
## グラフを使って表現

通貨Xから通貨Yへの両替 $\leftrightarrow$ 枝(X,Y)

両替レート = 枝(X,Y)の重み

→元の通貨に戻る両替の組合せ $\leftrightarrow$ 閉路

金額の変化率 = 閉路に含まれる枝の重みの積



この値>1 $\leftrightarrow$ 金額増加

$$\begin{aligned}
 & 100 \text{ JPY} \\
 & \rightarrow 0.76 \text{ EUR} \\
 & \rightarrow 0.76 \times 1.1 \text{ USD} \\
 & \rightarrow 0.76 \times 1.1 \times 1.2 \\
 & = 100.32 \text{ JPY}
 \end{aligned}$$

閉路の重みを長さに  
変換して、  
「重みの積>1 $\leftrightarrow$   
長さの和が負」が  
成り立つようにする  
(ヒント:  $\log ab$   
 $=\log a + \log b$ )

# 関連する問題: 差分不等式系

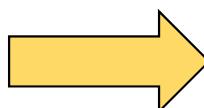
- 入力:  $n$  個の変数  $p_1, p_2, \dots, p_n$  からなる, 次の形の不等式系

$$p_i - p_j \leq \alpha_{ij}, \quad \beta_i \leq p_i \leq \gamma_i$$

- 出力: 不等式系に解が「ある」または「ない」の答え  
存在するときは, 解を求める

## 具体例

$$\begin{aligned} p_2 - p_1 &\leq 1, \quad p_3 - p_1 \leq 1, \\ p_3 - p_2 &\leq 3, \quad p_4 - p_2 \leq 5, \\ p_4 - p_3 &\leq 4, \quad p_3 - p_4 \leq 6, \\ p_1 &= 0, \quad p_4 \leq 5 \end{aligned}$$



解あり

$$(p_1, p_2, p_3, p_4) = (0, 1, 1, 5)$$

# 応用: プロジェクトスケジューリング

- ・幾つかの作業  $i=1, 2, \dots, n$  からなるプロジェクト(例:自動車製造)
  - ・最初の作業 1, 最後の作業  $n$
- ・各作業  $i$  の開始時間  $s_i$ , 終了時間  $t_i$  に関する制約
  - ・ $s_1 = 0, t_n \leq D$  (プロジェクトの開始終了時間に関する制約)
  - ・ $t_i - s_i \geq \alpha_i$  (各作業の処理時間に関する制約)
  - ・ $s_j - t_i \geq \beta_{ij}$  (作業のペアに関する制約)
- ・制約を満たすスケジュールは存在するか?
  - ・存在するならば, 終了時間最小のスケジュールを求めたい

# 最短路の計算

# ベルマン・フォードのアルゴリズム

(R. Bellman(1958), L. Ford, Jr.(1956))

**定理:** 有向グラフに負閉路が存在しない

→ 始点から各頂点へ、枝数  $\leq |V|-1$  の最短路が存在

証明は  
後ほど

- 各反復で、次の値を計算

$d_k(v)$  = 枝数が  $k$  以下の  $s$  から  $v$  への路の中で、最短なものの長さ  
 このような路は、2つのパターンあり

(1) 枝数が  $k-1$  以下 →  $d_k(v) = d_{k-1}(v)$

(2)  $s$  から、ある頂点  $u$  への路(ただし枝数  $\leq k-1$ ) + 枝( $u, v$ )

$$\rightarrow d_k(v) = d_{k-1}(u) + \ell(u, v)$$



∴ 次の再帰式が成立

$$d_k(v) = \min[d_{k-1}(v), \min\{d_{k-1}(u) + \ell(u, v) \mid (u, v) \in E\}]$$

# ベルマン・フォードのアルゴリズム

手順0:  $d_0(s) = 0, d_0(v) = +\infty (\forall v \neq s)$  とおく.  $k=1$ とする.

- $s$  から枝数0でたどり着けるのは  $s$  のみなので

手順1: 各頂点  $v$  に対し, 以下の式で  $d_k(v)$  を計算

$$d_k(v) = \min[d_{k-1}(v), \min\{d_{k-1}(u) + \ell(u, v) | (u, v) \in E\}]$$

手順2:  $k < |V|$  ならば  $k:=k+1$ とおいて手順1へ戻る.

$k=|V|$  ならば手順3へ.

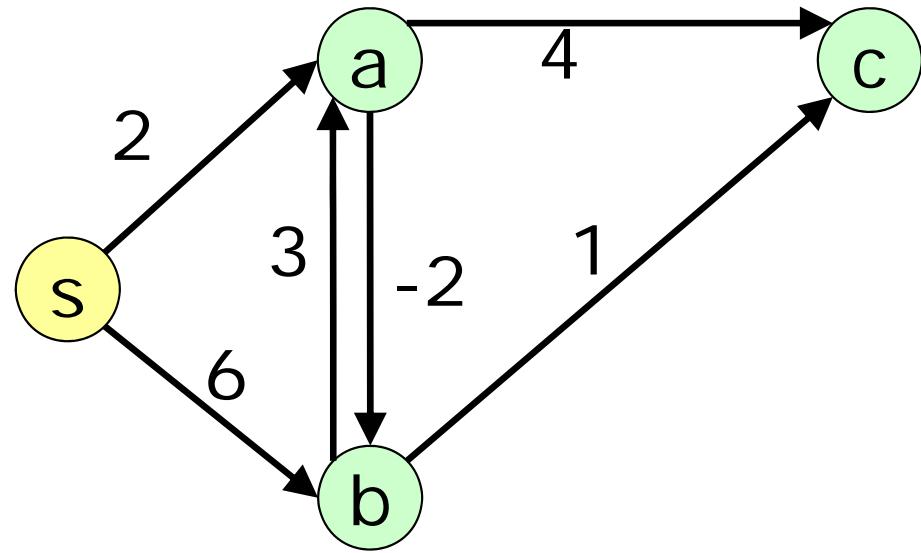
手順3: ある  $v$  に対して  $d_n(v) < d_{n-1}(v)$  が成立  $\rightarrow$  「負閉路存在」

全ての  $v$  に対して  $d_n(v) = d_{n-1}(v)$  が成立

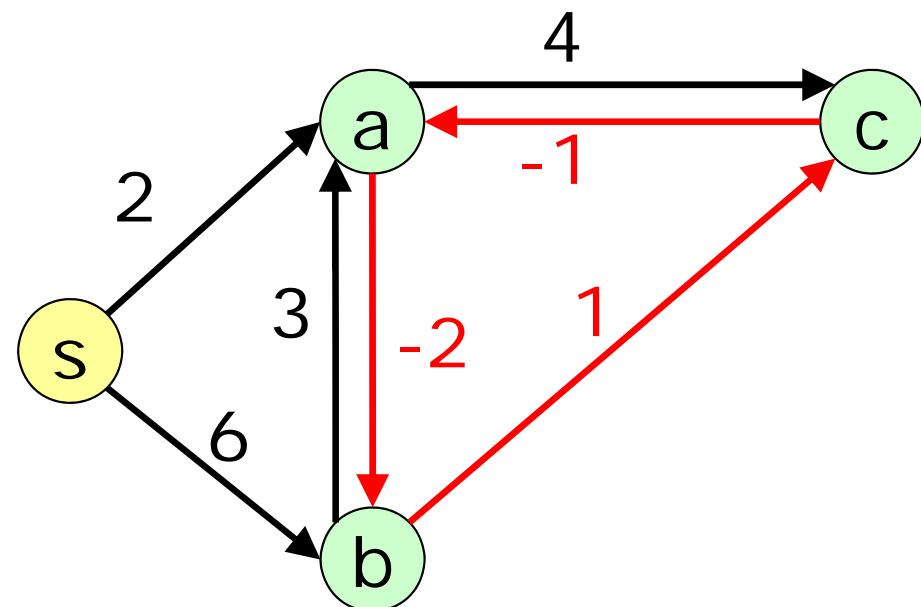
$\rightarrow$  最短路長  $d_{n-1}(v)$  を出力

最短路長だけでなく, 最短路を計算することも  
(若干の修正により) 可能である

# 実行例



	k=0	1	2	3	4
s	0	0	0	0	0
a	$\infty$	2	2	2	2
b	$\infty$	6	0	0	0
c	$\infty$	$\infty$	6	1	1



	k=0	1	2	3	4
s	0	0	0	0	0
a	$\infty$	2	2	2	0
b	$\infty$	6	0	0	0
c	$\infty$	$\infty$	6	1	1

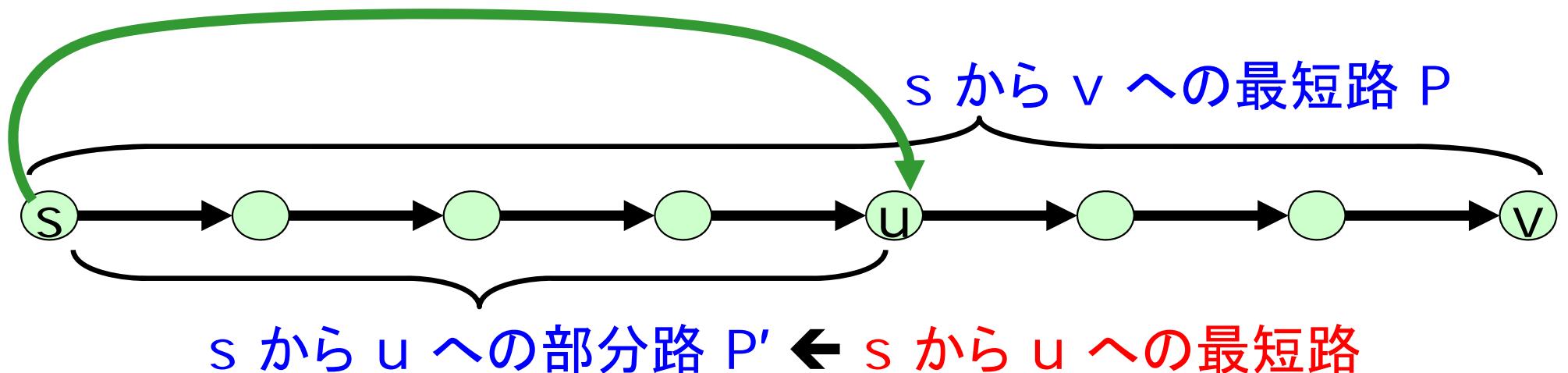
# 最短路の性質と証明

# 最短路の部分路は最短路

**命題** P: 頂点  $s$  から頂点  $v$  への最短路

P は途中に頂点  $u$  を含むと仮定

→  $s$  から  $u$  への P の部分路  $P'$  は,  $s$  から  $u$  への最短路



(証明) もし  $P'$  より短い路  $P''$  が存在したら

→  $s$  から  $v$  への路として, まず  $P''$  に沿って  $s$  から  $u$  に行き,  
その後 P と同じ枝をたどって  $v$  に行く路 Q を考える.

$Q$  の長さ -  $P$  の長さ =  $P''$  の長さ -  $P'$  の長さ  $< 0$   
よって,  $P$  の選び方に矛盾.

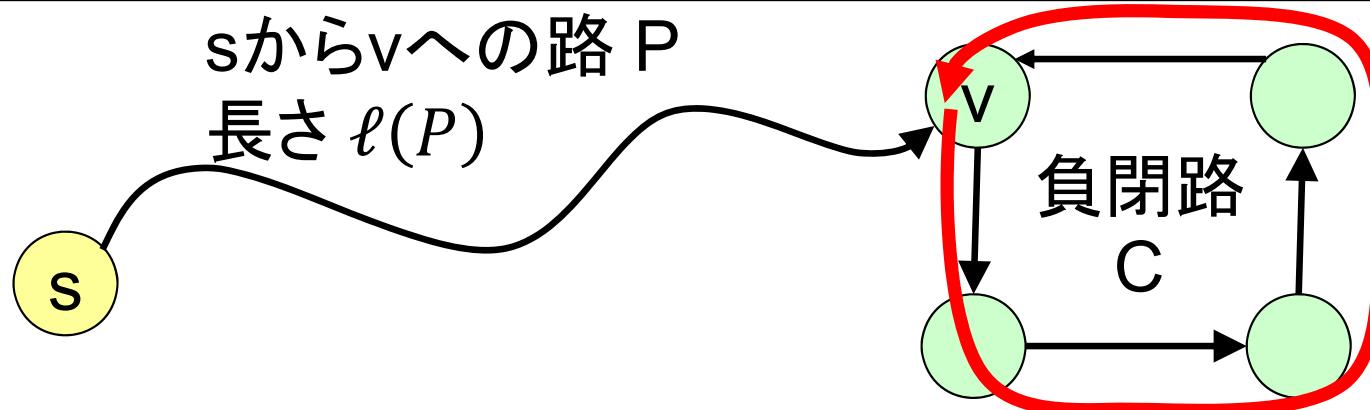
# 負閉路と最短路

- ・負閉路が存在  $\rightarrow$  ある頂点への最短路は存在しない
- ・[対偶] 全ての頂点への最短路が存在  $\rightarrow$  負閉路は存在しない

**命題** グラフに負閉路  $C$  が存在 (長さ  $\ell(C) < 0$ )

$\rightarrow C$  に含まれる各頂点  $v$  に対し,

$\inf\{ s \text{ から } v \text{ への路の長さ} \} = -\infty$  (最短路が存在しない)



(証明)  $s$  から  $v$  への路として, 次のようなものを考える:

路  $P$  を使って  $s$  から  $v$  に行く  $\rightarrow$  負閉路を  $k$  回通って  $v$  に戻る  
 これも  $s$  から  $v$  への路, 長さ  $\ell(P) + \ell(C) \times k$   
 $k$  を任意に大きくする  $\rightarrow$  路の長さが任意に小さくなる

# 負閉路と最短路(続き)

**命題** 負閉路が存在しない  $\rightarrow$  各頂点への最短路は存在  
 (対偶: ある頂点への最短路が存在しない  $\rightarrow$  負閉路は存在)

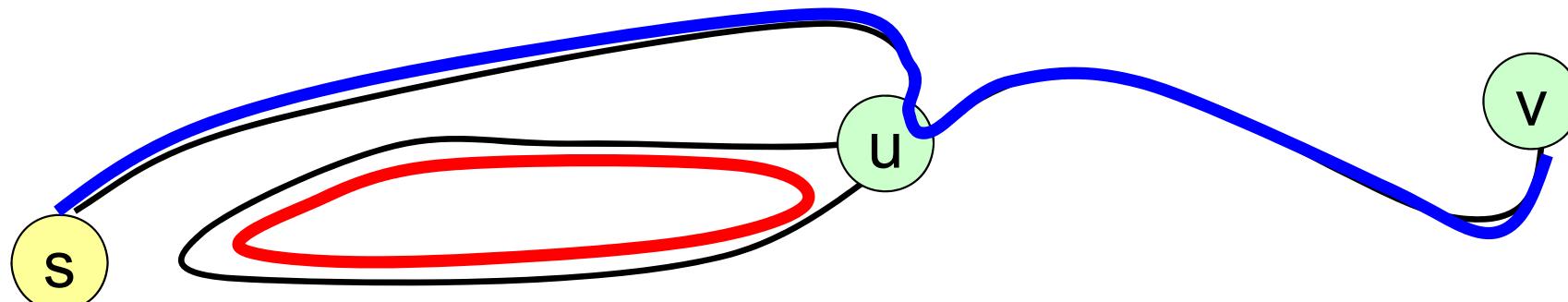
(証明)  $P^*$ :  $s$  から  $v$  への, 枝数  $|V|-1$  以下の路の中で, 最短 ( $\leftarrow$  必ず存在)  
 次の命題を示せば良い.

(A)  $s$  から  $v$  への, 枝数が  $|V|$  以上の任意の路  $P$  に対し  $\ell(P^*) \leq \ell(P)$

命題(A)を示すには, 次の(B)を示せば良い(なぜか?)

(B)  $s$  から  $v$  への, 枝数が  $|V|$  以上の任意の路  $P$  に対し,

枝数が  $P$  より少ない  $v$  への路  $P'$  が存在して,  $\ell(P') \leq \ell(P)$



$s$  から  $v$  への路  $P$ , 枝数  $\geq |V|$   $\rightarrow$  同じ頂点( $u$  とする)が2回現れる

$u$  から  $u$  への部分路は閉路  $\rightarrow$  長さは非負

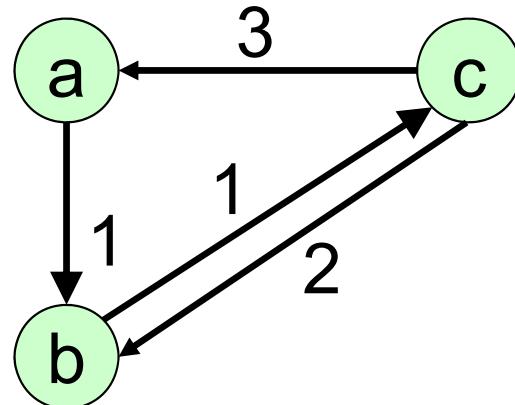
$\rightarrow$  削除すると, 枝数が少なく, 長さが短い路  $P'$  を得る

# ポテンシャルと負閉路

最短路問題における便利な道具

**定義:** 実数  $p(v) (v \in V)$  は **ポテンシャル**

←→ 各枝  $(u, v)$  に対し  $p(v) - p(u) \leq \ell(u, v)$  を満たす



$p(a) = 3, p(b) = 2, p(c) = 0$  はポテンシャル

※ ポテンシャルは存在しないこともある  
(例: (c,a) の枝長を-3にした場合)

**命題** ポテンシャルは存在 → 負閉路は存在しない  
(対偶: 負閉路が存在 → ポテンシャルは存在しない)

(証明) 任意の閉路  $C$  に対し,

不等式  $p(v) - p(u) \leq \ell(u, v) ((u, v) \in C)$  を辺々足す

→  $0 = \sum_{(u,v) \in C} [p(v) - p(u)] \leq \sum_{(u,v) \in C} \ell(u, v) = \text{閉路の長さ}$

# ポテンシャルと負閉路と最短路

**命題** ポテンシャルは存在  $\leftarrow$  負閉路は存在しない  
 (対偶: 負閉路が存在  $\leftarrow$  ポテンシャルは存在しない)

「負閉路なし」  
の証拠になる

**命題** 各頂点への最短路が存在する場合, 各頂点への  
最短路長  $d(v)$  はポテンシャル ( $d(v) - d(u) \leq \ell(u, v)$  成立)

(証明) 負閉路が存在しない  $\rightarrow$  最短路が存在 (前のスライドの命題より)  
 よって, 2つ目の命題を示せば良い.



$P$ : 頂点  $s$  から  $u$  への最短路,  $d(u) = P$  の長さ

$\rightarrow \tilde{P} = P \cup \{(u, v)\}$  は  $s$  から  $v$  への路,

その長さ =  $d(u) + \ell(u, v) \geq v$  への最短路長 =  $d(v)$

# 最短路の計算：正当性

# ベルマン・フォードのアルゴリズム

(R. Bellman(1958), L. Ford, Jr.(1956))

**定理:** 有向グラフに負閉路が存在しない

→ 始点から各頂点へ、枝数  $\leq |V|-1$  の最短路が存在

- 各反復で、次の値を計算

$d_k(v)$  = 枝数が  $k$  以下の  $s$  から  $v$  への路の中で、最短なものの長さ  
 このような路は、2つのパターンあり

(1) 枝数が  $k-1$  以下  $\rightarrow d_k(v) = d_{k-1}(v)$

(2)  $s$  からある頂点  $u$  への路(ただし枝数  $\leq k-1$ ) + 枝( $u, v$ )

$$\rightarrow d_k(v) = d_{k-1}(u) + \ell(u, v)$$



∴ 次の再帰式が成立

$$d_k(v) = \min[d_{k-1}(v), \min\{d_{k-1}(u) + \ell(u, v) \mid (u, v) \in E\}]$$

# アルゴリズムの正当性

再帰式  $d_k(v) = \min[d_{k-1}(v), \min\{d_{k-1}(u) + \ell(u, v) | (u, v) \in E\}]$

は  $k=n$  の場合でも成り立つ ( $n=|V|$ )

負閉路が存在しない

→ 各頂点  $v$  への最短路が存在する

→ 枝数  $\leq |V|-1$  の最短路が存在 (命題より)

→ 全ての  $v$  に対して  $d_n(v) = d_{n-1}(v)$  が成立

負閉路  $C$  が存在する

→ ある  $v$  に対して  $d_n(v) < d_{n-1}(v)$  が成立

(証明) すべての  $v$  に対して等号成立と仮定.

再帰式の定義より

$$d_n(v) = d_{n-1}(v) \leq d_{n-1}(u) + \ell(u, v) \quad (\forall (u, v) \in E)$$

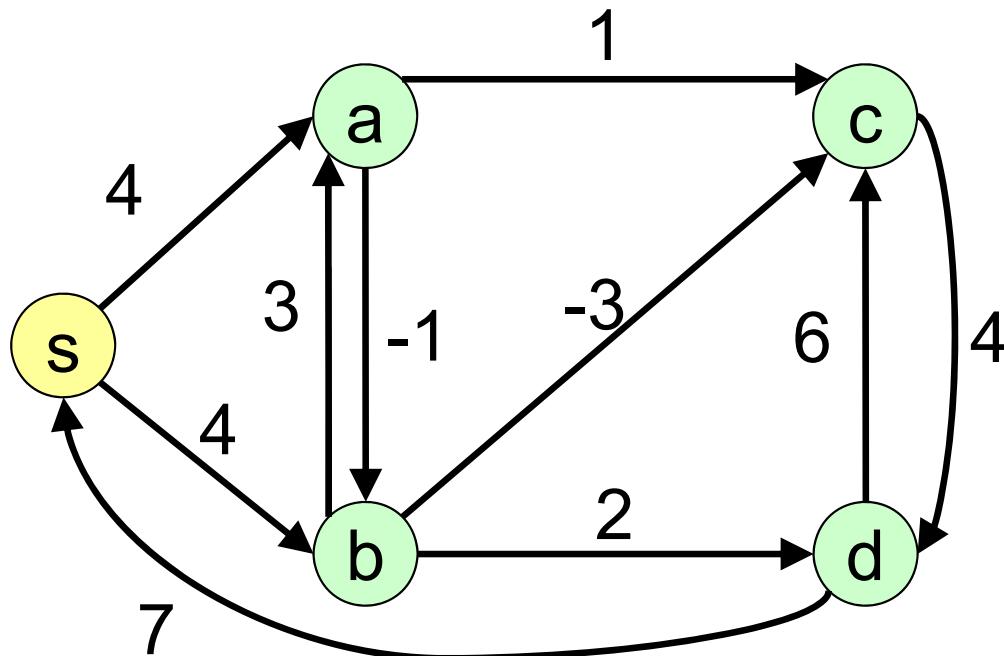
→  $d_{n-1}(v)$  はポテンシャル

→ 負閉路が存在しない (矛盾)

これを使って  
負閉路を検出

# 演習問題

問1: 下記のグラフにおける,  $s$  から各頂点への最短路長を, ベルマン・フォードのアルゴリズムで計算せよ.



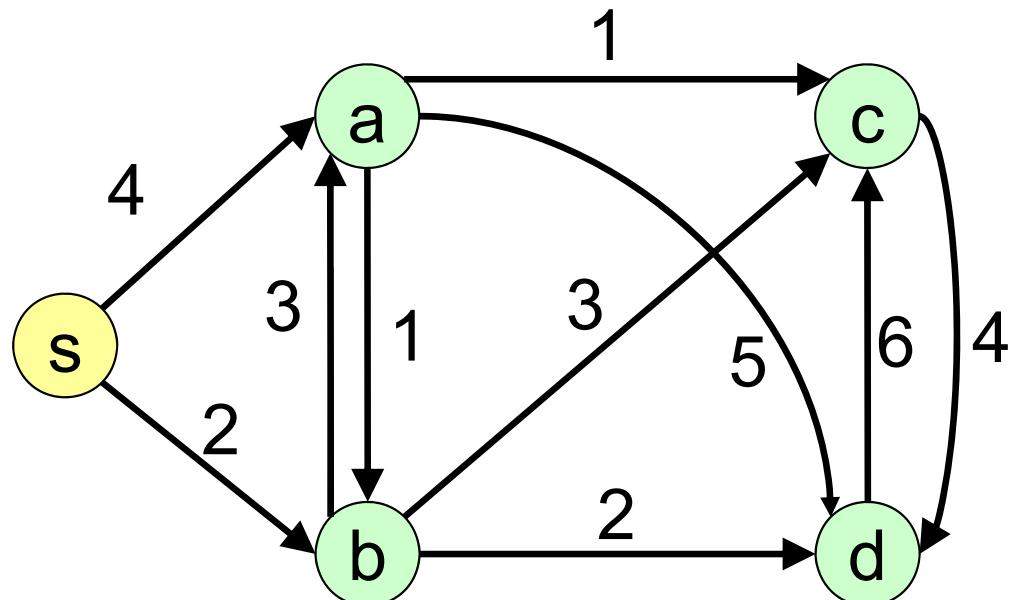
	$k=0$	1	2	3	4	5
$s$	0					
$a$	$+\infty$					
$b$	$+\infty$					
$c$	$+\infty$					
$d$	$+\infty$					

問2: 最短路問題を解いて, 次の不等式系の実行可能解を求めるか, または実行可能解をもたないことを示せ.

$$\begin{aligned}
 x_b - x_a &\leq -1, x_a - x_b \leq 3, x_c - x_a \leq 1, x_a - x_c \leq 2, \\
 x_c - x_b &\leq -3, x_d - x_b \leq 2, x_d - x_c \leq 4, x_c - x_d \leq 6
 \end{aligned}$$

# 演習問題

問3: 下記のグラフにおける,  $s$  から各頂点への最短路長を, ダイクストラのアルゴリズムで計算せよ.



	$n=0$	1	2	3	4
$s$	0				
$a$	$+\infty$				
$b$	$+\infty$				
$c$	$+\infty$				
$d$	$+\infty$				

問4: ベルマン・フォードのアルゴリズム, およびダイクストラのアルゴリズムにおいて, 最短路を計算するには, どのように修正したら良いか, 説明せよ.

# 演習問題

問5: 枝長が負のグラフにダイクストラのアルゴリズムを適用すると、なぜ最短路長が正しく計算できないのか？理由を説明せよ。

問6: 差分不等式の解を求めるところのスライドのケース1において、

新たな不等式  $p_i - p_s \leq M (i = 1, 2, \dots, n)$  を追加しても  
解集合が変化しない理由を説明せよ。

また、ケース2において、M はどの程度大きな正数をとれば良いか、説明せよ。