6.散乱行列

6.1 散乱行列の定義

無損失な伝送線路を考える。

$$V(y)=V_i e^{j\beta y}+V_r e^{-j\beta y}=\sqrt{R_c}\left(\frac{V_i}{\sqrt{R_c}}e^{j\beta y}+\frac{V_r}{\sqrt{R_c}}e^{-j\beta y}\right) \tag{6.1.a}$$

$$I(y)=\frac{1}{R_c}\left(V_i e^{j\beta y}-V_r e^{-j\beta y}\right)=\frac{1}{\sqrt{R_c}}\left(\frac{V_i}{\sqrt{R_c}}e^{j\beta y}-\frac{V_r}{\sqrt{R_c}}e^{-j\beta y}\right) \tag{6.1.b}$$

ここで，絶対値の二乗が電力に対応する次の量$a(y)$，$b(y)$を定義する。

$$a(y)=\frac{V_i}{\sqrt{R_c}}e^{j\beta y}\rightarrow |a(y)|^2=\frac{|V_i|^2}{R_c}$$ ：入射電力

$$b(y)=\frac{V_r}{\sqrt{R_c}}e^{-j\beta y}\rightarrow |b(y)|^2=\frac{|V_r|^2}{R_c}$$ ：出射電力

これを用いると，式(6.1)は次のように書き直される。

$$V(y)=\sqrt{R_c}\left(a(y)+b(y)\right) \tag{6.2.a}$$

$$I(y)=\frac{1}{\sqrt{R_c}}\left(a(y)-b(y)\right) \tag{6.2.b}$$

すなわち，$a(y)$及び$b(y)$が電圧，電流によって次の式に従って定められる。

$$a(y)=\frac{V(y)+R_c I(y)}{2\sqrt{R_c}} \tag{6.3.a}$$

$$b(y)=\frac{V(y)-R_c I(y)}{2\sqrt{R_c}} \tag{6.3.b}$$

ここで，$a(y)$及び$b(y)$を用いて 2 **開口**（4 端子）**回路**(two-port circuit)を表現する。

$$a_1(y)=\frac{V_1(y)+R_{c1}I_1(y)}{2\sqrt{R_{c1}}}$$

$$b_1(y)=\frac{V_1(y)-R_{c1}I_1(y)}{2\sqrt{R_{c1}}}$$

$$a_2(x)=\frac{V_2(x)+R_{c2}I_2(x)}{2\sqrt{R_{c2}}}$$

$$b_2(x)=\frac{V_2(x)-R_{c2}I_2(x)}{2\sqrt{R_{c2}}}$$

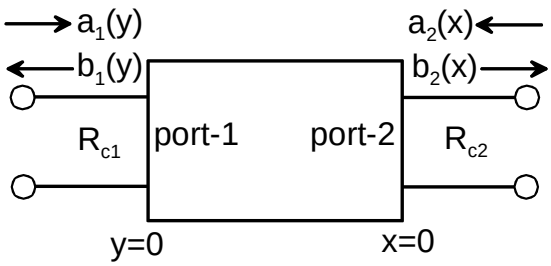

Fig.6.1　2 開口回路におけるa_i，b_i

観測する位置x，yによって$a(y)$，$b(y)$の位相が変わるので，ポートごとに適当な参照位置に対してこれらの量を定める。例えば，開口 1 (port-1)では参照面の位置を$y=0$，開口 2 (port-2)では$x=0$とする。

このとき，反射波$b_1(0)=b_1$及び$b_2(0)=b_2$は，入射波$a_1(0)=a_1$及び$a_2(0)=a_2$によって，次のように表すことができる。

$$b_1 = S_{11}a_1 + S_{12}a_2 \tag{6.4.a}$$

$$b_2 = S_{21}a_1 + S_{22}a_2 \tag{6.4.b}$$

これを行列表現すれば，次のようになる。

$$\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} S_{11} & S_{12} \\ S_{21} & S_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \tag{6.5}$$

$$\mathbf{b} = \mathbf{S}\mathbf{a}$$

$\mathbf{S}$を**散乱行列**(scattering matrix)とよぶ。ここで，**対角要素**(diagonal element)は各開口における反射を表し，非対角要素は対応する開口間の伝達を表す。

・任意の**線形**(linear)，**受動**(passive)，**時不変な**(time-invariant)回路は，散乱行列を用いて記述することができる。

・3 開口以上の**多開口回路**(multi-port circuit)も同様に，散乱行列を用いて記述することができる。

6.2 回路の無損失性

回路に入力した全電力は次式で表される。

$$|a_1|^2 + |a_2|^2 + \ldots + |a_n|^2 = (a_1^*, a_1^*, \ldots, a_n^*) \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \tilde{\mathbf{a}}\mathbf{a} \tag{6.6}$$

$\tilde{\mathbf{a}}$: transpose conjugate of $\mathbf{a}$

回路が**無損失**(loss-less)であれば，回路に入力する電力と回路から出力される電力は等しい。このことから，次の関係が成り立つ。

$$\tilde{\mathbf{a}}\mathbf{a} = \tilde{\mathbf{b}}\mathbf{b}$$

$$\mathbf{b} = \mathbf{S}\mathbf{a}$$

$$\tilde{\mathbf{b}} = \tilde{\mathbf{a}}\tilde{\mathbf{S}}$$

$$\tilde{\mathbf{a}}\mathbf{a} - \tilde{\mathbf{b}}\mathbf{b} = \tilde{\mathbf{a}}\mathbf{a} - \tilde{\mathbf{a}}\tilde{\mathbf{S}}\mathbf{S}\mathbf{a} = \tilde{\mathbf{a}}(\mathbf{I} - \tilde{\mathbf{S}}\mathbf{S})\mathbf{a} = 0$$

$$\therefore \tilde{\mathbf{S}}\mathbf{S} = \mathbf{S}\tilde{\mathbf{S}} = \mathbf{I} \tag{6.7}$$

すなわち，無損失回路の散乱行列$\mathbf{S}$は**ユニタリー行列**(unitary matrix)になる。

6.3 回路の可逆性

回路が**可逆**(reciprocal)であるということは，次の関係を意味する。

$$\left.\frac{b_2}{a_1}\right|_{a2=0} = \left.\frac{b_1}{a_2}\right|_{a1=0}$$

すなわち，散乱行列の要素の間には次の関係が成り立つ。

$$\therefore S_{21} = S_{12} \tag{6.8}$$

一般に，n 開口回路が**可逆回路**(reciprocal circuit)の場合，$S_{ij} = S_{ji}$ となる。すなわち，可逆回路の散乱行列 **S** は，**対称行列**(symmetric matrix)になる。