

4.誘電体導波路

$\mu_r = 1$ の誘電体導波路(dielectric waveguide)を考える。このとき、屈折率(refractive index) n と比誘電率(relative permittivity) ϵ_r の間には、次の関係がある。

$$\epsilon_r = n^2$$

4.1 誘電体スラブ（平板）導波路の伝搬定数

図 4-1 に示すように、 $x-z$ 平面に無限に広がる平板状の誘電体(dielectric material)を考える。この誘電体の中に閉じ込められて電磁界が伝搬するので、誘電体導波路となる。この導波路(waveguide)を伝搬する電磁界の伝搬定数(propagation constant)は、厳密解(exact solution)が次のようにして求めることができる。

屈折率の関係を、 $n_1 > n_2, n_3$ とする。 n_1 と n_2 及び n_1 と n_3 の境界における電磁界接線成分(tangential component)の連続条件から、次のようにして特性方程式(characteristic equation)が導出される。

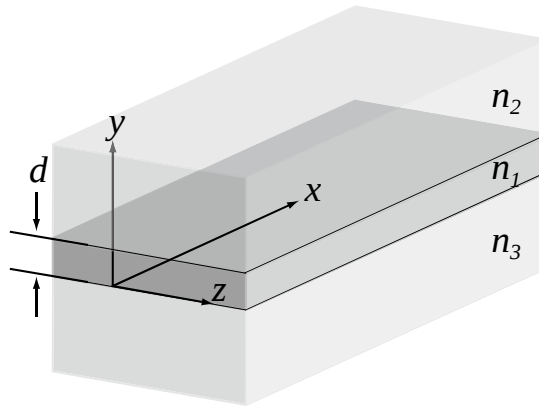


Fig. 4.1 誘電体スラブ導波路(dielectric slab waveguide)

(1) TE モード (E_x, H_y, H_z)

スラブ導波路(slab waveguide)では x 方向に変化がないので $\frac{\partial}{\partial x} = 0$ となる。また、電磁界は z 方向に伝搬するとして z 方向依存性を $e^{-j\beta z}$ とおけば、マクスウェルの方程式は次のように書き下すことができる。

$$\frac{\partial H_z}{\partial y} + j\beta H_y = j\omega\epsilon E_x \quad (4.1.a)$$

$$-j\beta H_x = j\omega\epsilon E_y \quad (4.1.b)$$

$$-\frac{\partial H_x}{\partial y} = j\omega\epsilon E_z \quad (4.1.c)$$

$$\frac{\partial E_z}{\partial y} + j\beta E_y = -j\omega\mu_0 H_x \quad (4.2.a)$$

$$-j\beta E_x = -j\omega\mu_0 H_y \quad (4.2.b)$$

$$-\frac{\partial E_x}{\partial y} = -j\omega\mu_0 H_z \quad (4.2.c)$$

式(4.1.a), (4.2.b), (4.2.c)を整理すると, 次の**波動方程式(wave equation)**を得る。ここで, 式(4.1.b), (4.1.c), (4.2.a)の組と, 式(4.1.a), (4.2.b), (4.2.c)の組は独立であることに注意する。

$$\frac{\partial^2 E_x}{\partial y^2} + (\omega^2 \varepsilon \mu_0 - \beta^2) E_x = 0 \quad (4.3)$$

式(4.3)の解として, E_x を次のようにおくことができる。ただし, 境界 $y = 0, d$ において E_x (異なる誘電体の境界に接する電界成分) が連続になるように, 各領域の振幅係数を選んでいる。

$$E_x = \begin{cases} (A \cos u d + B \sin u d) e^{-w_2(y-d)} & : y \geq d \\ A \cos u y + B \sin u y & : d \geq y \geq 0 \\ A e^{w_3 y} & : 0 \geq y \end{cases} \quad (4.4)$$

$$w_2 = \sqrt{\beta^2 - n_2^2 \omega^2 \varepsilon_0 \mu_0} = \sqrt{\beta^2 - n_2^2 k_0^2}$$

$$u = \sqrt{n_1^2 \omega^2 \varepsilon_0 \mu_0 - \beta^2} = \sqrt{n_1^2 k_0^2 - \beta^2}$$

$$w_3 = \sqrt{\beta^2 - n_3^2 \omega^2 \varepsilon_0 \mu_0} = \sqrt{\beta^2 - n_3^2 k_0^2}$$

$$k_0 = \omega \sqrt{\varepsilon_0 \mu_0} = \frac{2\pi}{\lambda}$$

さらにもう一つの境界条件 “境界 $y = 0, d$ に接する磁界成分 $H_z = \frac{1}{j\omega\mu_0} \frac{\partial E_x}{\partial y}$ が連続” である

ことを課すと, 次の式が導かれる。電磁界の周波数 ω , 各領域の屈折率 n_i , 誘電体平板の厚さ d を与えると, この式によって電磁界の伝搬定数 $\gamma = j\beta$ が決まる。そのため, 特性方程式とよばれる。

$$\tan u d = \frac{u(w_2 + w_3)}{u^2 - w_2 w_3} \quad (4.5)$$

(2) TM モード (H_x, E_y, E_z)

同様に, 式(4.1.b), (4.1.c), (4.2.a)を用いると, 次の特性方程式が導かれる。

$$\tan u d = \frac{\frac{u}{n_1^2} \left(\frac{w_2}{n_2^2} + \frac{w_3}{n_3^2} \right)}{\left(\frac{u}{n_1^2} \right)^2 - \frac{w_2}{n_2^2} \frac{w_3}{n_3^2}} \quad (4.6)$$

ここで, TE モード (式(4.1.a), (4.2.b), (4.2.c)で決まる) と TM モード (式(4.1.b), (4.1.c), (4.2.a)で決まる) は, 互いに独立に存在する。

(3) 対称スラブ導波路(symmetric slab waveguide)

特別な場合として, $n_2 = n_3$ の場合は $w = w_2 = w_3$ として次の式をえる。

$$\tan 2u \frac{d}{2} = \frac{2uw}{u^2 - w^2} = \frac{2\frac{w}{u}}{1 - \left(\frac{w}{u}\right)^2} \quad (\text{TE mode}) \quad (4.7)$$

$$\begin{aligned} \tan^2 \frac{ud}{2} + \left(\frac{u}{w} - \frac{w}{u}\right) \tan \frac{ud}{2} - 1 &= 0 \\ \left(\tan \frac{ud}{2} - \frac{w}{u}\right) \left(\tan \frac{ud}{2} + \frac{u}{w}\right) &= 0 \end{aligned}$$

したがって、この場合の特性方程式は、次の2式に分離することができる。

$$\tan \frac{ud}{2} = \frac{w}{u} \quad \text{偶モード(even mode)} \quad (4.8.a)$$

$$\tan \frac{ud}{2} = -\frac{u}{w} \quad \text{奇モード(odd mode)} \quad (4.8.b)$$

4.2 単一モード条件

式(4.5)は、次のように変形できる。

$$\begin{aligned} \tan ud &= \frac{\frac{w_2}{u} + \frac{w_3}{u}}{1 - \frac{w_2}{u} \frac{w_3}{u}} \\ ud &= \tan^{-1} \frac{w_2}{u} + \tan^{-1} \frac{w_3}{u} + m\pi \end{aligned} \quad (4.9)$$

ここで、 $n_2 = n_3$ の場合は $w_2 = w_3 = w = \sqrt{\beta^2 - n_2^2 k_0^2}$ として、次のように整理できる。

$$u \frac{d}{2} = \tan^{-1} \frac{w}{u} + \frac{\pi}{2} m$$

すなわち、

$$\sqrt{n_1^2 k_0^2 - \beta^2} \frac{d}{2} = \tan^{-1} \frac{\sqrt{\beta^2 - n_2^2 k_0^2}}{\sqrt{n_1^2 k_0^2 - \beta^2}} + \frac{\pi}{2} m \quad (4.10)$$

この式を、次のように変形する。

$$\sqrt{n_1^2 k_0^2 - \beta^2} = k_0 \sqrt{n_1^2 - \frac{\beta^2}{k_0^2}} = k_0 \sqrt{(n_1^2 - n_2^2) + n_2^2 - \frac{\beta^2}{k_0^2}} = k_0 \sqrt{n_1^2 - n_2^2} \sqrt{1 - \frac{\frac{\beta^2}{k_0^2} - n_2^2}{n_1^2 - n_2^2}}$$

$$\frac{\sqrt{\beta^2 - n_2^2 k_0^2}}{\sqrt{n_1^2 k_0^2 - \beta^2}} = \frac{\sqrt{\frac{\beta^2}{k_0^2} - n_2^2}}{\sqrt{1 - \frac{\beta^2}{n_1^2 k_0^2}}}$$

ここで、規格化伝搬定数(normalized propagation constant)を $b = \frac{\beta^2}{k_0^2} - n_2^2$ とおくと、 $n_2 k_0 < \beta < n_1 k_0$ であるから、規格化伝搬定数は $0 < b < 1$ の範囲の値を取りえる。規格化伝搬定数を用いると、式(4.10)は次のように整理できる。

$$\frac{d}{2} k_0 \sqrt{n_1^2 - n_2^2} \sqrt{1-b} = \tan^{-1} \frac{\sqrt{b}}{\sqrt{1-b}} + \frac{\pi}{2} m \quad (4.11)$$

式(4.11)の根 b は、左辺と右辺の交点として求まる。 $0 < b < 1$ に対して $\tan^{-1} \frac{\sqrt{b}}{\sqrt{1-b}}$ は $0 < \tan^{-1} \frac{\sqrt{b}}{\sqrt{1-b}} < \frac{\pi}{2}$ の範囲で変化する。したがって、式(4.11)が $m=0$ のとき以外に根を持たない条件は、式(4.11)の左辺の最大値(maximum value)が $\frac{\pi}{2}$ より大きくならない条件であるから、次のように定まる（式(4.11)左辺は $b=0$ で最大となる）。

$$\frac{d}{2} k_0 \sqrt{n_1^2 - n_2^2} < \frac{\pi}{2}$$

すなわち、これが $n_2 = n_3$ の対称スラブ導波路中を一つのモードだけが伝搬可能な条件（単一モード条件(single mode condition)）となる。

$V = \frac{d}{2} k_0 \sqrt{n_1^2 - n_2^2}$ は、導波路の V 値(V parameter)と呼ばれる。

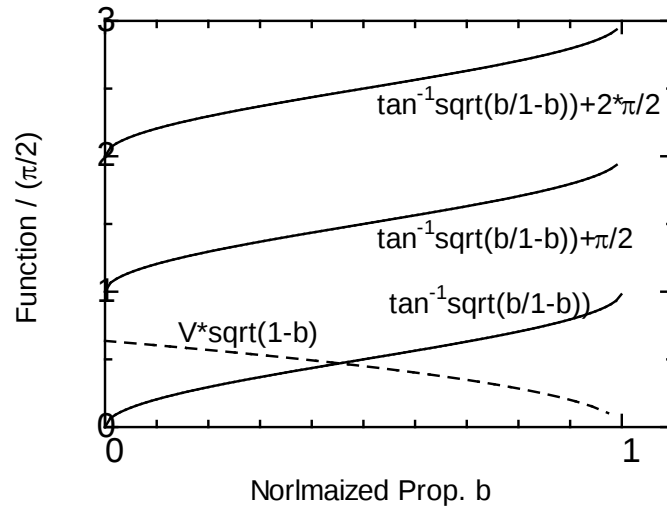


Fig. 4.2 対称スラブ導波路（TE モード）の特性方程式の解