3.導波管

3.1 矩形導波管

断面が矩形形状（幅a×高さb）の導波管の観軸方向にz軸をとり，z軸にそって伝搬する電磁界を考える。ここで，時間tと位置zに対する依存性は$e^{j\omega t-\gamma z}$と仮定する。

矩形導波管を伝搬する電磁界は，伝搬方向に電界成分を持たない TE モード(Transverse Electric mode)と，伝搬方向に磁界成分を持たない TM モード(Transverse Magnetic mode)に分類される。

(1) TE モード（$E_z=0$）

$$\gamma E_y=-j\omega\mu H_x \tag{3.1.a}$$

$$-\gamma E_x=-j\omega\mu H_y \tag{3.1.b}$$

$$\frac{\partial E_y}{\partial x}-\frac{\partial E_x}{\partial y}=-j\omega\mu H_z \tag{3.1.c}$$

$$\frac{\partial H_z}{\partial y}+\gamma H_y=j\omega\varepsilon E_x \tag{3.1.d}$$

$$-\gamma H_x-\frac{\partial H_z}{\partial x}=j\omega\varepsilon E_y \tag{3.1.e}$$

$$\frac{\partial H_y}{\partial x}-\frac{\partial H_x}{\partial y}=0 \tag{3.1.f}$$

式(3.1.b)より

$$H_y=\frac{\gamma}{j\omega\mu}E_x$$

式(3.1.d)に代入して

$$\frac{\partial H_z}{\partial y}+\frac{\gamma^2 E_x}{j\omega\mu}=jw\varepsilon E_x$$

$$E_x=\frac{-j\omega\mu}{\gamma^2+\omega^2\varepsilon\mu}\frac{\partial H_z}{\partial y}=\frac{-j\omega\mu}{\beta_c^2}\frac{\partial H_z}{\partial y} \tag{3.2}$$

同様に，(3.1.a)，(3.1.e)から

$$E_y=\frac{j\omega\mu}{\beta_c^2}\frac{\partial H_z}{\partial x} \tag{3.3}$$

式(3.3)，(3.2)をそれぞれ式(3.1.a)，(3.1.b)に代入すると次の関係を得る。

$$H_x=\frac{-\gamma}{\beta_c^2}\frac{\partial H_z}{\partial x} \tag{3.4}$$

$$H_y=\frac{-\gamma}{\beta_c^2}\frac{\partial H_z}{\partial y} \tag{3.5}$$

これらを式(3.1.c)に代入すると，次の式を得る。

$$\frac{j\omega\mu}{\beta_c^2}\frac{\partial^2 H_z}{\partial x^2}+\frac{j\omega\mu}{\beta_c^2}\frac{\partial^2 H_z}{\partial y^2}=-j\omega\mu H_z$$

$$\therefore \frac{\partial^2 H_z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 H_z}{\partial y^2}=-\beta_c^2 H_z \qquad (3.6)$$

H_zについて**変数分離**(separation of variables)を仮定し，$H_z = X(x)Y(y)$とおくと，式(3.6)は次のように2本の微分方程式に分離される。

$$\frac{1}{X(x)}\frac{d^2X}{dx^2}+\frac{1}{Y(y)}\frac{d^2Y}{dy^2}=-\beta_c^2$$

$$\frac{1}{X(x)}\frac{d^2X}{dx^2}=-\beta_x^2 \qquad (3.7)$$

$$\frac{1}{Y(y)}\frac{d^2Y}{dy^2}=-\beta_y^2 \qquad (3.8)$$

$$\beta_x^2+\beta_y^2=\beta_c^2$$

式(3.7)及び(3.8)から，$X(x)$，$Y(y)$についてそれぞれ次のように解を表すことができる。

$$X(x)=A\sin\beta_x x+B\cos\beta_x x \qquad (3.9)$$

$$Y(y)=C\sin\beta_y y+D\cos\beta_y y \qquad (3.10)$$

式(3.9を式(3.3)に用いると，E_yは次のように表される。

$$E_y=\frac{j\omega\mu}{\beta_c^2}\frac{\partial H_z}{\partial x}=\frac{j\omega\mu}{\beta_c^2}\beta_x(A\cos\beta_x x-B\sin\beta_x x)Y(y)$$

ここで，$x=0,a$における**境界条件**(boundary condition)$E_y=0$を適用すると次の関係を得る。

$$A=0 \qquad (E_y=0 \quad at \quad x=0)$$

$$\sin\beta_x a=0 \qquad (E_y=0 \quad at \quad x=a)$$

$$\therefore \beta_x=\frac{m\pi}{a}$$

同様に，$y=0,\mathrm{b}$における境界条件$E_x=0$より次の関係を得る。

$$C=0$$

$$\sin\beta_y b=0 \qquad \therefore \beta_y=\frac{n\pi}{b}$$

以上より，H_zは次の式で表される。

$$H_z=H_0\cos\frac{m\pi}{a}x\cos\frac{n\pi}{b}y \qquad (3.11.a)$$

但し，nとmは同時に0にはならい。

また，他の電磁界成分は次のようになる。

$$E_x = \frac{j\omega\mu}{\beta_c^2} H_0 \frac{n\pi}{b} \cos\frac{m\pi}{a} x \sin\frac{n\pi}{b} y \tag{3.11.b}$$

$$E_y = \frac{-j\omega\mu}{\beta_c^2} H_0 \frac{m\pi}{a} \sin\frac{m\pi}{a} x \cos\frac{n\pi}{b} y \tag{3.11.c}$$

$$H_x = \frac{\gamma}{\beta_c^2} H_0 \frac{m\pi}{a} \sin\frac{m\pi}{a} x \cos\frac{n\pi}{b} y \tag{3.11.d}$$

$$H_y = \frac{\gamma}{\beta_c^2} H_0 \frac{n\pi}{b} \cos\frac{m\pi}{a} x \sin\frac{n\pi}{b} y \tag{3.11.e}$$

$$\beta_c^2 = \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2 = \gamma^2 + \omega^2\varepsilon\mu$$

$$\therefore \gamma = \pm\sqrt{\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2 - \omega^2\varepsilon\mu}$$

(2) TM モード（$H_z = 0$）

TE モードで E と H，$-j\omega\mu$ と $j\omega\varepsilon$ を交換して，境界条件 $E_z = 0$（$x = 0,\ a$），$E_z = 0$（$y = 0, \mathrm{b}$）を課すと，TE モードと同様に次の電磁界成分が導出される。

$$E_z = E_0 \sin\frac{m\pi}{a} x \sin\frac{n\pi}{b} y \qquad (m, n \geq 1) \tag{3.12.a}$$

$$E_x = \frac{-\gamma}{\beta_c^2} E_0 \frac{m\pi}{a} \cos\frac{m\pi}{a} x \sin\frac{n\pi}{b} y \tag{3.12.b}$$

$$E_y = \frac{-\gamma}{\beta_c^2} E_0 \frac{n\pi}{b} \sin\frac{m\pi}{a} x \cos\frac{n\pi}{b} y \tag{3.12.c}$$

$$H_x = \frac{j\omega\varepsilon}{\beta_c^2} E_0 \frac{n\pi}{b} \sin\frac{m\pi}{a} x \cos\frac{n\pi}{b} y \tag{3.12.d}$$

$$H_y = \frac{-j\omega\varepsilon}{\beta_c^2} E_0 \frac{m\pi}{a} \cos\frac{m\pi}{a} x \sin\frac{n\pi}{b} y \tag{3.12.e}$$

$$\gamma = \pm\sqrt{\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2 - \omega^2\varepsilon\mu}$$

(3) 直交性

TE モードの電磁界は，次の関係（**直交性**(orthogonality)）を満足する。

$$E_t^e = \frac{j\omega\mu}{\beta_c^2}\left(-\frac{\partial H_z}{\partial y} i + \frac{\partial H_z}{\partial x} j\right)$$

$$H_t^e = \frac{-\gamma}{\beta_c^2}\left(\frac{\partial H_z}{\partial x} i + \frac{\partial H_z}{\partial y} j\right)$$

$$\therefore E_t^e \cdot H_t^e = \frac{-j\omega\mu\gamma}{\beta_c^4}\left(-\frac{\partial H_z}{\partial x}\frac{\partial H_z}{\partial y}+\frac{\partial H_z}{\partial x}\frac{\partial H_z}{\partial y}\right)=0 \qquad (3.13)$$

TM モードの電磁界は，次の関係を満足する。

$$E_t^m = \frac{-\gamma}{\beta_c^2}\left(\frac{\partial E_z}{\partial x}i+\frac{\partial E_z}{\partial y}j\right)$$

$$H_t^m = \frac{j\omega\varepsilon}{\beta_c^2}\left(\frac{\partial E_z}{\partial y}i-\frac{\partial E_z}{\partial x}j\right)$$

$$\therefore E_t^m \cdot H_t^m = \frac{-j\omega\varepsilon\gamma}{\beta_c^4}\left(\frac{\partial E_z}{\partial x}\frac{\partial E_z}{\partial y}-\frac{\partial E_z}{\partial x}\frac{\partial E_z}{\partial y}\right)=0 \qquad (3.14)$$

4.2 円形導波管

円筒座標系(cylindrical coordinate system) で Maxwell の方程式を考える。

$$\nabla\times H = i_r\left(\frac{1}{r}\frac{\partial H_z}{\partial\theta}-\frac{\partial H_\theta}{\partial z}\right)+i_\theta\left(\frac{\partial H_r}{\partial z}-\frac{\partial H_z}{\partial r}\right)+i_z\frac{1}{r}\left(\frac{\partial(rH_\theta)}{\partial r}-\frac{\partial H_r}{\partial\theta}\right) \qquad (3.15)$$

(1) TE モード

Maxwell の方程式で $E_z = 0$ とおき，式を H_z について式を整理すると次の関係式を得る。

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial}{\partial r}H_z\right)+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}H_z+\beta_c{}^2H_z = 0 \qquad (3.16)$$

$$(\beta_c^2 = \gamma^2+\omega^2\varepsilon\mu)$$

この方程式を，$H_z = R(r)\Theta(\theta)$ とおいて変数分離法で解くと次の関係式を得る。

$$\begin{aligned}
&\frac{r}{R(r)}\frac{d}{dr}\left(r\frac{d}{dr}R(r)\right)+\beta_c{}^2r^2 = -\frac{1}{\Theta(\theta)}\frac{d^2}{d\theta^2}\Theta(\theta)\\
&\frac{r}{R(r)}\frac{d}{dr}\left(r\frac{d}{dr}R(r)\right)+\beta_c{}^2r^2 = n^2\\
&\frac{1}{\Theta(\theta)}\frac{d^2}{d\theta^2}\Theta(\theta) = -n^2
\end{aligned} \qquad (3.17)$$

式(3.17)より，$R(r)$ と $\Theta(\theta)$ はそれぞれ次の微分方程式を満足しないといけない。

$$\frac{d^2R(r)}{dr^2}+\frac{1}{r}\frac{dR(r)}{dr}+\left(\beta_c{}^2-\frac{n^2}{r^2}\right)R(r) = 0 \qquad (3.18)$$

$$\frac{d^2}{d\theta^2}\Theta(\theta) = -n^2\Theta(\theta) \qquad (3.19)$$

式(3.18)はベッセルの微分方程式で，その解は次のように**第一種ベッセル関数**(the first kind Bessel function) $J_n(\beta_c r)$ 及び**第二種ベッセル関数** $Y_n(\beta_c r)$ が候補となる。

$$R(r) = AJ_n(\beta_c r)+BY_n(\beta_c r)$$

ここで，$Y_n(\beta_c r)$ は $r=0$ において ∞ に発散する(diverge)ので，物理的に適当ではない。

一方，式(3.19)の解は次のようになる。

$$\Theta(\theta) = C\cos n\theta + D\sin n\theta$$

θ の座標原点を適当に選べば，$\Theta(\theta)$ は一つの関数 $\cos n\theta$ で表現できる。

以上のことから，式(3.16)の解は次のように求まる。

$$H_z = H_0 J_n(\beta_c r)\cos n\theta \tag{3.20.a}$$

また，H_z 以外の電磁界成分は H_z によって次のように表される。

$$E_r = \frac{-j\omega\mu}{\beta_c^2}\frac{1}{r}\frac{\partial H_z}{\partial\theta} \tag{3.20,b}$$

$$E_\theta = \frac{j\omega\mu}{\beta_c^2}\frac{\partial H_z}{\partial r} \tag{3.20.c}$$

$$H_r = \frac{-\gamma}{\beta_c^2}\frac{\partial H_z}{\partial r} \tag{3.20.d}$$

$$H_\theta = \frac{-\gamma}{\beta_c^2}\frac{1}{r}\frac{\partial H_z}{\partial\theta} \tag{3.20.e}$$

$$(\beta_c^2 = \gamma^2 + \omega^2\varepsilon\mu)$$

式(3.20.a)を用いれば，E_θ は次のようになる。

$$E_\theta = \frac{j\omega\mu}{\beta_c^2}\beta_c H_0 J_n'(\beta_c r)\cos n\theta \tag{3.21}$$

ここで，境界条件 $r=a$ で $E_\theta = 0$ を当てはめると，$J_n'(x)=0$ の根を q_{nm} とすれば $\beta_c a = q_{nm}$ となる。したがって，β_c 及び伝搬定数 γ は次のように定まる。

$$\beta_c = \frac{q_{nm}}{a} \tag{3.22}$$

$$\gamma = \pm\sqrt{\left(\frac{q_{nm}}{a}\right)^2 - \omega^2\varepsilon\mu} \tag{3.23}$$

(2) TM モード

TE モードと同様の手順で，$E_z = R(r)\Theta(\theta)$ についての微分方程式から次のように整理される。

$$E_z = E_0 J_n(\beta_c r)\cos n\theta \tag{3.24.a}$$

$$E_r = \frac{-\gamma}{\beta_c^2}\frac{\partial E_z}{\partial r} \tag{3.24.b}$$

$$E_\theta = \frac{-\gamma}{\beta_c^2}\frac{1}{r}\frac{\partial E_z}{\partial\theta} \tag{3.24.c}$$

$$H_r = \frac{j\omega\varepsilon}{\beta_c^2}\frac{1}{r}\frac{\partial E_z}{\partial\theta} \tag{3.24.d}$$

$$H_\theta = \frac{-j\omega\varepsilon}{\beta_c^2}\frac{\partial E_z}{\partial r} \tag{3.24.e}$$

$$(\beta_c^2 = \gamma^2 + \omega^2\varepsilon\mu)$$

このとき，E_θ は次の式で表される。

$$E_\theta = \frac{\gamma}{\beta_c^2}\frac{n}{r}E_0 J_n(\beta_c r)\sin n\theta \tag{3.25}$$

$r = a$ で $E_\theta = E_z = 0$ という境界条件を適用すると，$J_n(x) = 0$ の根を p_{nm} とすれば $\beta_c a = p_{nm}$ となる。すなわち，β_c 及び伝搬定数 γ は次のように定まる。

$$\beta_c = \frac{p_{nm}}{a} \tag{3.26}$$

$$\gamma = \pm\sqrt{\left(\frac{p_{nm}}{a}\right)^2 - \omega^2\varepsilon\mu} \tag{3.27}$$

4.3 遮断周波数

(1) **遮断周波数**(cut-off frequency)：$\gamma = 0$ となる周波数 ω_c

$\omega > \omega_c$ ：γ は純虚数 $\gamma = j\beta$ となるので，z 方向に伝搬する電磁界となる

$\omega \le \omega_c$ ：γ は実数 $\gamma = \alpha$ となり，z 方向に単調に**減衰**(decay)し，伝搬しない。すなわち，カットオフ状態となる。

(2) 遮断波長(cut-off wavelength)：

$$\lambda_c = \frac{2\pi}{\omega_c\sqrt{\varepsilon\mu}} \tag{3.28}$$

(3) 伝搬モード(guided mode)：

- 最も ω_c の小さいモードを**最低次モード**(lowest order mode)あるいは**基底モード**(fundamental mode)と呼ぶ。
- $a = 2b$ なる矩形導波管で考えると，ω_c の小さい順にモードを並べると次のようになる。

  TE_{10}
  TE_{20}、TE_{01}
  TE_{11}、TM_{11}
  TE_{21}、TM_{21}, ...

- 円形導波管の場合，ω_c の小さい順にモードを並べると次のようになる。

  TE_{11}
  TM_{01}
  TE_{21}
  TE_{01}，TM_{11} ....