

1. 基本的事項

1.1 交流の複素表現

正弦波(sinusoidal wave)は、次の式で表される。

$$e(t) = A \cos(\omega t + \theta) \quad (1.1)$$

この代わりに次の表現を使う。

$$E(t) = A e^{j(\omega t + \theta)} = A e^{j\theta} e^{j\omega t} = \dot{A} e^{j\omega t} \quad (1.2)$$

すなわち、複素振幅 $\dot{A} = A e^{j\theta}$ を用いて表現する。

- $E(t) = \dot{A} e^{j\omega t}$ から $e(t) = A \cos(\omega t + \theta)$ を求めるときには、次の手続をふめば良い。

$$e(t) = \text{Re}[E(t)] \text{ あるいは } e(t) = \text{Im}[E(t)] \quad (1.3)$$

- ある回路に電源電圧 $E(t) = \dot{E} e^{j\omega t}$ を印可したとき、電流 $I(t) = \dot{I} e^{j\omega t}$ が流れたとする。この比をとると、次のようになる。

$$\frac{E(t)}{I(t)} = \frac{\dot{E} e^{j\omega t}}{\dot{I} e^{j\omega t}} = \frac{\dot{E}}{\dot{I}} \quad (1.4)$$

これはインピーダンス(impedance)と呼ばれる。注意すべき点は、これは時間に無関係な量であるということ。

一方、正弦波表現の場合はどうなるか。

$$\frac{e(t)}{i(t)} = \frac{E \cos(\omega t + \theta_1)}{I \cos(\omega t + \theta_2)} \quad (1.5)$$

単純に電圧/電流の比をとると時間に無関係の量とはならない。インピーダンスは、正弦波の複素表現によって、はじめて定義できる。

- ベクトル(vector)はスカラー(scalar)量が成分ごとに加算されたものと考えれば、物理量がベクトルになっても同じ扱いができる。ただし、一つの物理量について時間依存性は全ての成分で同一であるから、次のようになる。

$$\mathbf{E}(t) = \dot{\mathbf{E}} e^{j\omega t}$$

1.2 マクスウェルの方程式(Maxwell's equation)

$$\text{rot} \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (1.6.a)$$

$$\text{rot} \mathbf{H} = \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \mathbf{J}_c + \mathbf{J}_s \quad (1.6.b)$$

時間的な変化を $e^{j\omega t}$ (角周波数(angular frequency) ω の正弦波) と仮定すると、 $\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = j\omega \mathbf{B}$ なので

$$\text{rot} \mathbf{E} = -j\omega \mathbf{B} \quad (1.7.a)$$

$$\text{rot} \mathbf{H} = j\omega \mathbf{D} + \mathbf{J}_c + \mathbf{J}_s \quad (1.7.b)$$

対象とする空間の媒質が線形(linear)で等方的(isotropic)であるとき、次の関係が成り立つ。

$$\begin{aligned}\mathbf{D} &= \epsilon \mathbf{E} \\ \mathbf{B} &= \mu \mathbf{H} \\ \mathbf{J}_c &= \sigma \mathbf{E}\end{aligned}\tag{1.8}$$

ここで、 ϵ, μ, σ は全てスカラー(scalar)量である。

また、波源の無い(source free)空間では、次の関係が成り立つ。

$$\mathbf{J}_s = 0, \quad \sigma = 0\tag{1.9}$$

1.3 平面波

波源のない、線形で等方的な媒質からなる、無限に広がった空間を、電磁界が平面波(plane wave)として伝搬する。式(1.8), (1.9)のもとで、式(1.7)のマクスウェルの方程式(Maxwell's equation)を考える。

$$\text{rot} \mathbf{E} = -j\omega\mu \mathbf{H}\tag{1.10.a}$$

$$\text{rot} \mathbf{H} = j\omega\epsilon \mathbf{E}\tag{1.10.b}$$

さらに、ベクトル $\mathbf{E}$ 及び $\mathbf{H}$ をそれぞれ次のように成分表示する。

$$\begin{aligned}\mathbf{E} &= (E_x, E_y, E_z) e^{j\omega t} \\ \mathbf{H} &= (H_x, H_y, H_z) e^{j\omega t}\end{aligned}$$

ここで、 x, y, z 直角直交座標系(rectangular cartesian coordinate system)で考えると、ベクトル演算は次の式で表される。

$$\text{rot} \mathbf{E} = \mathbf{i} \left(\frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} \right) e^{j\omega t} + \mathbf{j} \left(\frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x} \right) e^{j\omega t} + \mathbf{k} \left(\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} \right) e^{j\omega t}\tag{1.11}$$

マクスウェルの方程式(1.10)を成分ごとに書き出すと、次のようになる。

$$\frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} = -j\omega\mu H_x\tag{1.12.a}$$

$$\frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x} = -j\omega\mu H_y\tag{1.12.b}$$

$$\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} = -j\omega\mu H_z\tag{1.12.c}$$

$$\frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial z} = j\omega\epsilon E_x\tag{1.13.a}$$

$$\frac{\partial H_x}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial x} = j\omega\epsilon E_y\tag{1.13.b}$$

$$\frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} = j\omega\epsilon E_z\tag{1.13.c}$$

この空間において、次のような電磁界が存在するかどうか調べる。

- (i) z 軸に垂直な $x-y$ 平面内で変化しない

(ii) 電界 $\mathbf{E}$ は x 方向成分のみ

式(1.12), (1.13)から次のようになる。

$$0 = -j\omega\mu H_x \quad (1.14.a)$$

$$\frac{\partial E_x}{\partial z} = -j\omega\mu H_y \quad (1.14.b)$$

$$0 = -j\omega\mu H_z \quad (1.14.c)$$

$$-\frac{\partial H_y}{\partial z} = j\omega\epsilon E_x \quad (1.15.a)$$

$$\frac{\partial H_x}{\partial z} = 0 \quad (1.15.b)$$

式(1.14.a)及び式(1.14.c)から, $H_x = H_z = 0$ となる。また, 残りの式は次のように整理される。

$$\frac{dE_x}{dz} = -j\omega\mu H_y \quad (1.16.a)$$

$$\frac{dH_y}{dz} = -j\omega\epsilon E_x \quad (1.16.b)$$

式(1.16a)と(1.16b)から, 次の微分方程式(differential equation)が得られる。

$$\frac{d^2 E_x}{dz^2} = -\omega^2 \epsilon \mu E_x \quad (1.17)$$

$\gamma = j\omega\sqrt{\epsilon\mu}$ とおくと, この微分方程式の解は次のようになる。

$$E_x = E_1 e^{-\gamma z} + E_2 e^{+\gamma z} \quad (1.18)$$

さらに, 式(1.16.a)から H_y は次のようになる。

$$H_y = \frac{1}{-j\omega\mu} \frac{dE_x}{dz} = \frac{\gamma}{j\omega\mu} (E_1 e^{-\gamma z} - E_2 e^{+\gamma z}) = \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} (E_1 e^{-\gamma z} - E_2 e^{+\gamma z}) \quad (1.19)$$

(1) 重要なパラメータ

伝搬定数(propagation constant) $\gamma = j\omega\sqrt{\epsilon\mu}$

波動インピーダンス(wave impedance) $Z_c = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}}$

特に, 空間の媒質が無損失(loss-less)の場合, ϵ 及び μ は実数となる。このとき, γ は純虚数, Z_c は実数になる。 $\gamma = j\beta$ と表し, 実数 β を位相定数(phase constant)とよぶ。

(2) 位相速度

位相面が一定の位置が移動する速度を表す。平面波の位相項は $e^{j(\omega t \mp \beta z)}$ で表されるので, $\omega t - \beta z = \text{一定}$ の条件から位相速度(phase velocity)は次の式で定まる。

$$v_p = \pm \frac{\omega}{\beta} = \pm \frac{1}{\sqrt{\epsilon\mu}} \quad (1.20)$$

(3) エネルギーの伝搬

電磁界のエネルギー流の時間平均は, 次の複素ポインティングベクトル(Poynting vector)の実数部で与えられる。

$$\mathbf{S} = \frac{1}{2} \mathbf{E} \times \mathbf{H}^* \quad (1.21)$$

ただし、 $\mathbf{H}^*$ は $\mathbf{H}$ の複素共役(complex conjugate)を表す。

(i) +z 方向伝搬

$$\mathbf{E}^+ = \mathbf{i}E_1 e^{j(\omega t - \beta z)}$$

$$\mathbf{H}^+ = \mathbf{j} \frac{1}{Z_c} E_1 e^{j(\omega t - \beta z)}$$

位相速度(phase velocity):

$$v_p = \frac{\omega}{\beta} = \frac{1}{\sqrt{\epsilon\mu}} \quad (1.20.a)$$

波動インピーダンス:

$$\frac{E_x^+}{H_y^+} = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} = \eta \quad (1.22.a)$$

(ii) -z 方向伝搬

$$\mathbf{E}^- = \mathbf{i}E_2 e^{j(\omega t + \beta z)}$$

$$\mathbf{H}^- = -\mathbf{j} \frac{1}{Z_c} E_2 e^{j(\omega t + \beta z)}$$

位相速度(phase velocity):

$$v_p = -\frac{\omega}{\beta} = -\frac{1}{\sqrt{\epsilon\mu}} \quad (1.20.b)$$

波動インピーダンス:

$$\frac{E_x^-}{-H_y^-} = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} = \eta \quad (1.22.b)$$