

フーリエ変換とラプラス変換

第14回講義資料

担当: 角嶋邦之

kakushima.k.aa@m.titech.ac.jp

工学院電気電子系

講義予定(全15回)

第1回	6/14	線形システムとは, 周期関数の級数展開
第2回	6/16	フーリエ級数の性質
第3回	6/21	線形回路の周期波に対する定常応答
第4回	6/23	フーリエ級数の理解度確認総合演習と解説
第5回	6/28	非周期関数とフーリエ積分・フーリエ変換
第6回	6/30	フーリエ変換の存在と性質
第7回	7/5	時間領域表示と周波数領域表示, 線形回路の時間応答と周波数応答
第8回	7/7	理解度の確認と解説

第9回	7/12	シャノンの標本化定理
第10回	7/14	離散フーリエ変換の基礎(定義, 性質)
第11回	7/19	離散フーリエ変換の実際(帯域制限, 窓関数, 高速フーリエ変換, 応用例)
第12回	7/21	$0 \sim \infty$ 上の関数とラプラス変換, ラプラス変換の性質
第13回	7/26	ラプラス逆変換, 部分分数展開
第14回	7/28	線形回路の過渡応答, システムの安定性, 電気電子システムへの応用
第15回	8/2	z 変換と演習問題(テスト)

ラプラス変換の電気電子システムへの応用

フィルタ設計

電気信号に帯域制限を掛けたり、特定の周波数成分のみを抽出するための電気回路

- ローパス: 低周波のみ透過
- ハイパス: 高周波のみ透過
- バンドパス: ある周波数域のみ透過
- バンドエリミネーション: ある周波数のみ遮断

制御器設計

ダイナミクス(微分・積分を含む伝達関数)をコントロールする工学的手法

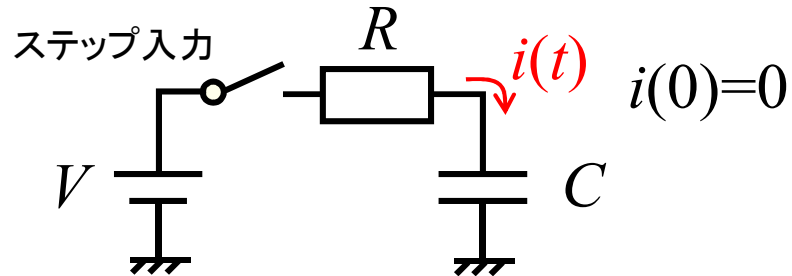
入出力関係で制御: 古典制御 (PIDなど)

状態変数: 現代制御(ラプラス変換は使えない)

目的: 目標値追従特性、外乱抑制特性の向上

周波数応答: ラプラス変換とフーリエ変換の関係

下記のRC回路を考える



$$V = iR + \frac{1}{C} \int i dt \quad \xrightarrow{\text{ラプラス変換}} \quad \frac{V}{s} = IR + \frac{1}{sC} I$$

$$\therefore I(s) = \frac{V}{R} \frac{1}{s + 1/CR} \quad \xrightarrow{\text{ラプラス逆変換}} \quad i(t) = \frac{V}{R} e^{-t/CR}$$

得られた電流波形をフーリエ変換する

$$\begin{aligned} F(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} i(t) e^{-j\omega t} dt \quad j \text{は虚数} \\ &= \int_0^{\infty} i(t) e^{-j\omega t} dt \quad (t < 0, i(t) = 0 \text{ より}) \\ &= \int_0^{\infty} \frac{V}{R} e^{-t/CR} e^{-j\omega t} dt \\ &= \frac{V}{R} \frac{1}{j\omega + 1/CR} \end{aligned}$$

ラプラス変換の s を $j\omega$ に変えた形になっている

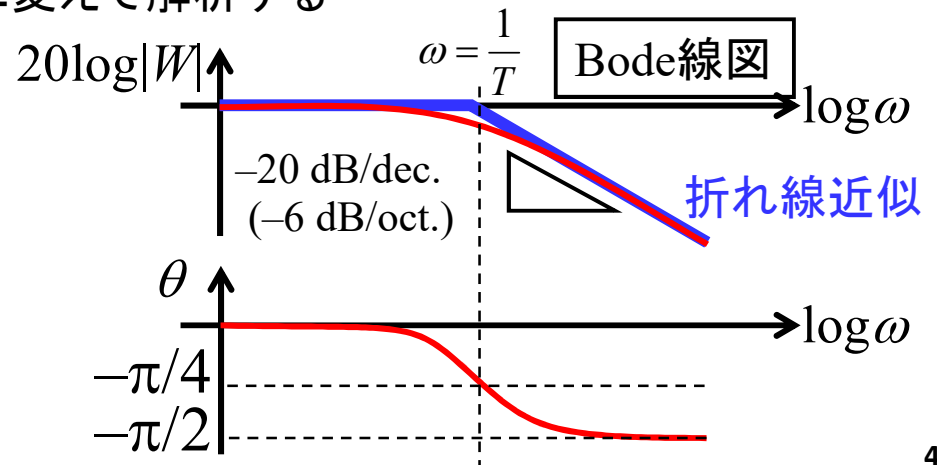
システムの周波数応答を見たい場合は $s \rightarrow i\omega$ に変えて解析する

例) 一次遅れ系

$$\begin{aligned} \text{利得(gain)} \quad W(s) &= \frac{A}{1 + Ts} \quad \Rightarrow \quad W(i\omega) = \frac{A}{1 + i\omega T} \\ \text{位相(phase)} \quad |W| &= \frac{A}{\sqrt{1 + \omega^2 T^2}}, \quad \arg W = -\tan^{-1} \omega T \end{aligned}$$

デシベル表示

$$20 \log |W| = 20 \log A - 20 \log |1 + \omega^2 T^2|^{\frac{1}{2}}$$



システムの安定性評価

$$W(s) = \frac{A_1}{(s-s_1)} + \frac{A_2}{(s-s_2)} + \dots + \frac{A_i}{(s-s_i)} + \dots + \frac{A_n}{(s-s_n)} \quad \text{と記述できるシステムを考える}$$

インパルスを入力して、ラプラス逆変換すると、
 $s_1, s_2, \dots, s_i, \dots, s_n$ を極という

$$\omega(t) = (A_1 e^{s_1 t} + A_2 e^{s_2 t} + \dots + A_i e^{s_i t} + \dots + A_n e^{s_n t}) \delta(t)$$

(1) s_i が実数 α_i の場合

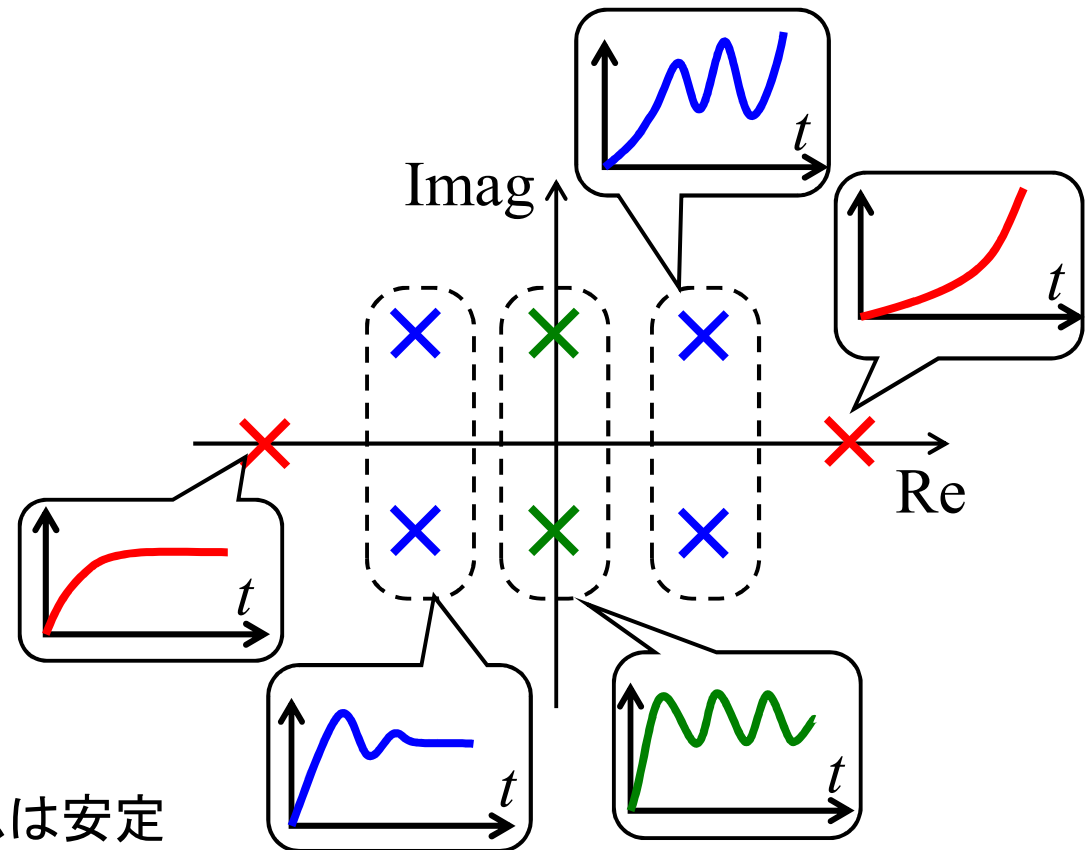
$\alpha_i < 0$ であれば、 $t \rightarrow \infty$ で収束

$\alpha_i > 0$ なら、発散 $\rightarrow$ 不安定

(2) s_i が複素数 $\alpha_i + i\omega$ の場合

$\alpha_i < 0$ であれば、 $t \rightarrow \infty$ で収束

$\alpha_i > 0$ なら、発散 $\rightarrow$ 不安定

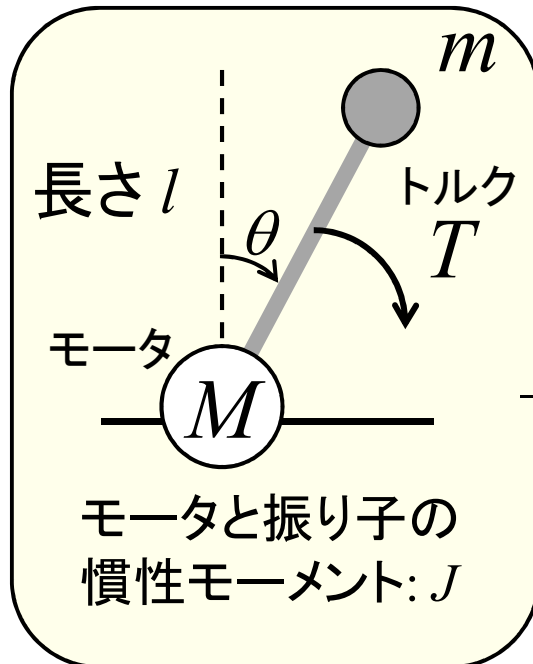


極の実数部が負にあればシステムは安定

フィードバック制御設計によるシステムの安定化

下図の倒立振り子を考える。

入力: モータのトルク、出力: 角度



運動方程式 $J\ddot{\theta} = mgl \sin \theta + T$ ^{トルク}

$\theta < 1$ の場合、 $\sin \theta \sim \theta$ の近似が可能

$$J\ddot{\theta} = mgl\theta + T$$

(初期値は0とする)

ラプラス変換を行う $Js^2\Theta = mgl\Theta + T$

伝達関数は $\frac{\Theta(s)}{T(s)} = \frac{1}{J} \frac{1}{(s + \sqrt{mgl/J})(s - \sqrt{mgl/J})}$

目標値 θ_0 に停止させるため $T = K_1(\theta - \theta_0) + K_2\dot{\theta}$ ^{トルク} というフィードバックを考える

すると運動方程式は $J\ddot{\theta} = mgl\theta + K_1(\theta - \theta_0) + K_2\dot{\theta}$

$$Js^2\Theta = mgl\Theta + K_1(\Theta - \Theta_0) + K_2s\Theta$$

$$\frac{\Theta}{\Theta_0} = \frac{-K_1}{Js^2 - K_2s - mgl - K_1}$$

(初期値は0とする)

定常状態では最終定理より ($s \rightarrow 0$)

$$\frac{\theta}{\theta_0} = \frac{K_1}{mgl + K_1} \quad \left[|K_1| \rightarrow \text{大が良い?} \right]$$

一方、極の値は

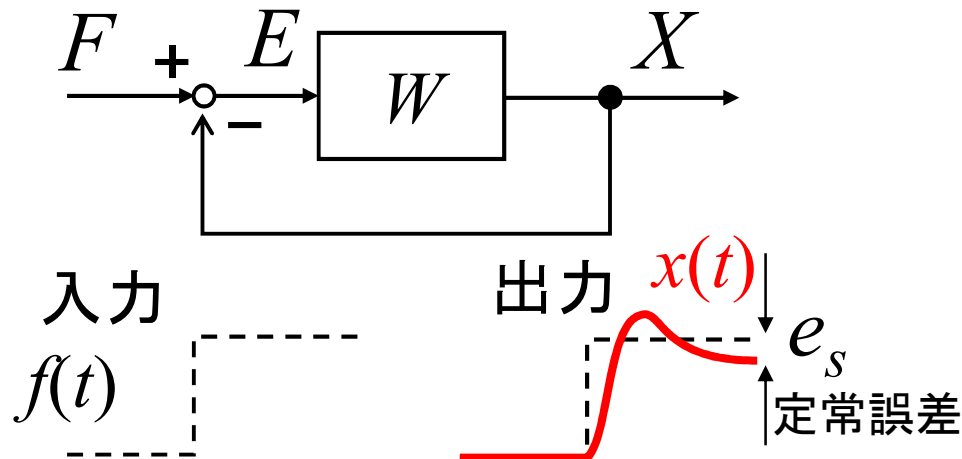
$$s = \frac{K_2 \pm \sqrt{K_2^2 + 4J(mgl + K_1)}}{2J}$$

安定化には、極が複素平面の左半面内であるべき
ルートの中が正でも K_2^2 を超えたらダメなので、

$K_1 < 0, K_2 < 0$ とすべき

定常誤差とその量

ステップ入力に対する最終値の誤差



$$E = F - X = \left(1 - \frac{W(s)}{1 + W(s)}\right) F = \frac{1}{1 + W(s)} F$$

最終値の定理

$$e_s = \lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot \frac{1}{1 + W(s)} \frac{1}{s}$$
$$= \frac{1}{1 + W(0)}$$

$e_s = 0$ とするためには $W(0)$ が ∞ である必要がある

$W(0) = \infty$ となるためには、

$$W(s) = \frac{\dots}{s(s + p_1)(s + p_2) \dots}$$

のように分母に s が必要

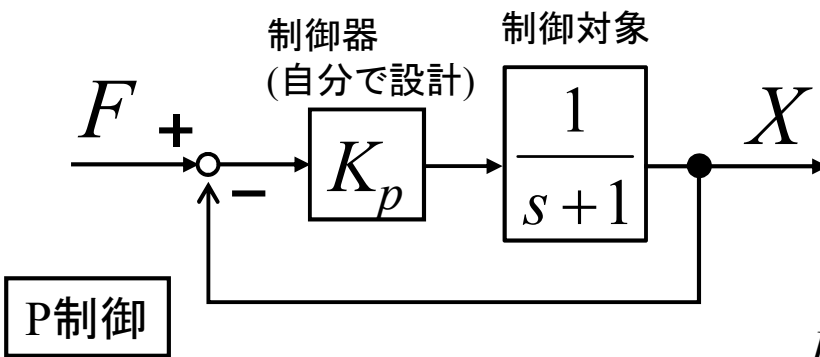
$W(s)$ の分母に s がない場合

$$e_s = \frac{1}{1 + K} \quad \begin{array}{l} \text{定常誤差} \\ K: \text{定常ゲイン} \end{array}$$

定常誤差を無くしたい場合

$1/s$ の伝達関数を有する制御器を導入すればよい。

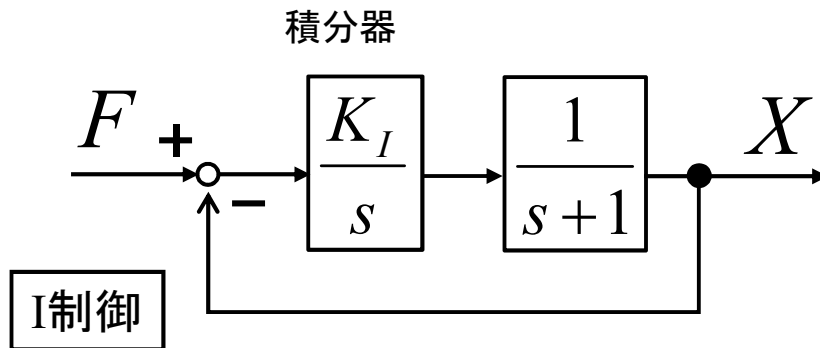
制御器の導入と一次遅れ系 $1/(Ts+1)$ の安定性



$$\frac{X}{F} = \frac{K_p}{1 + K_p} \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + K_p} s}$$

一次遅れ系

K_p をいくら大きくしても安定。しかし、定常誤差が残る。



$$\frac{X}{F} = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$$

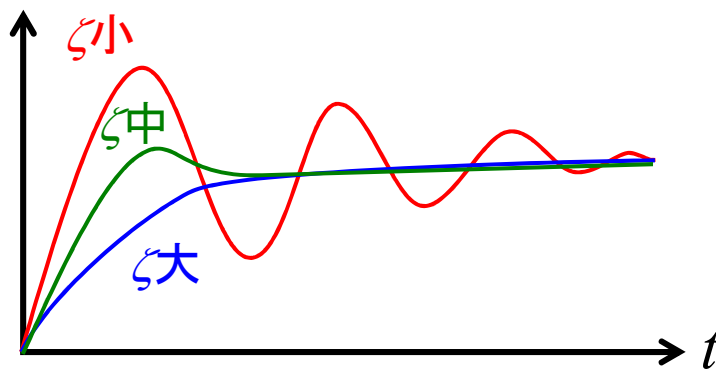
二次遅れ系になる

K_I をいくら大きくしても安定、定常誤差もない。

固有角周波数

減衰係数

$$\omega_n = \sqrt{K_I}, \quad \zeta = \frac{1}{2\omega_n} = \frac{1}{2\sqrt{K_I}}$$



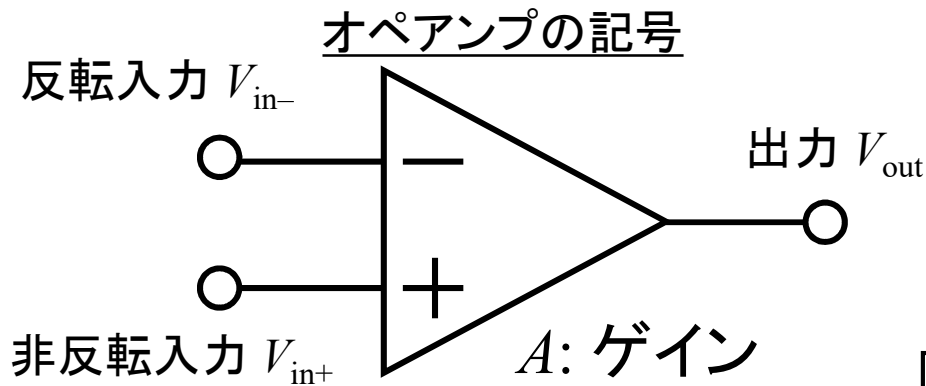
ω_n は応答の速さ、 ζ は応答波形を決定する。

しかし、 ω_n を大きくするために K_I を大きくすると ζ が小さくなり振動的になる。

アナログ制御器の実現法

積分器

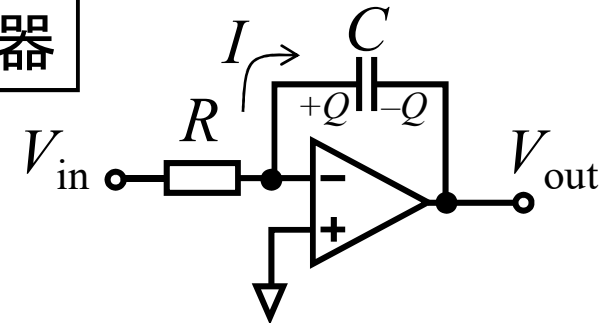
オペアンプを使う
(operational amplifier)



$$V_{out} = A (V_{in+} - V_{in-})$$

入力の差にゲインを掛けて出力する素子

- 入力インピーダンスは十分大きいとする
- 非反転入力を接地すると反転入力も接地とみなせる。(バーチャルショート)

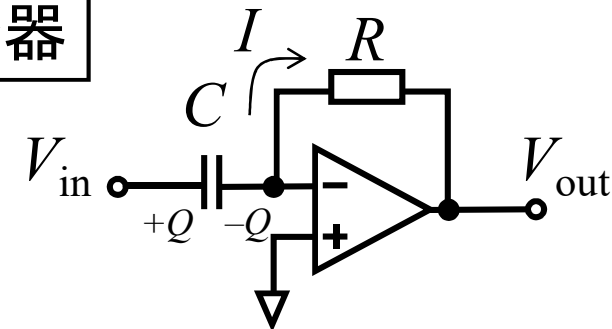


$$I = V_{in} / R, \quad Q = \int I dt, \quad V_{out} = -Q / C$$

$$V_{out} = -\int \frac{1}{RC} V_{in} dt$$

$$\mathcal{L}^{-1}(V_{out}) = -\left(\frac{1}{sRC}\right) \mathcal{L}^{-1}(V_{in})$$

微分器



$$I = -V_{out} / R, \quad Q = \int I dt, \quad V_{in} = Q / C$$

$$V_{out} = -RC \frac{dV_{in}}{dt}$$

$$\mathcal{L}^{-1}(V_{out}) = -sRC \mathcal{L}^{-1}(V_{in})$$

離散時間信号のラプラス変換と z 変換

離散時間信号 $x_s(t)$ は単位インパルス列 $\delta_T(t)$ で表現できる($t \geq 0$)

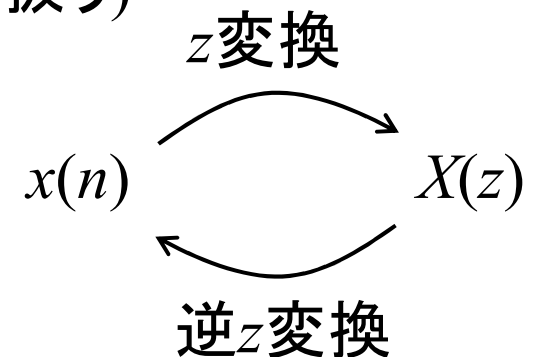
$$x_s(t) = x(t)\delta_T(t) = x(t)\delta(t) + x(t)\delta(t-T) + x(t)\delta(t-2T) + \dots$$

ラプラス変換をすると

$$\begin{aligned} X_s(s) &= \int_0^{\infty} \{x(t)\delta(t) + x(t)\delta(t-T) + x(t)\delta(t-2T) + \dots\} e^{-st} dt \\ &= x(0) + x(T)e^{-Ts} + x(2T)e^{-2Ts} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} x(nT)e^{-nTs} \end{aligned}$$

複素関数 z を $z = e^{sT}$ と定義し、サンプリング時間 T でなく、単位サンプリング時刻とする(数列として扱う)

$$\mathcal{Z}\{x(n)\} = X(z) = \sum_{n=0}^{\infty} x(n)z^{-n}$$



代表的な z 変換と変換表

■ 単位インパルス の z 変換

$$X(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \delta(n) z^{-n} = \delta(0) z^{-1} = 1$$

■ 単位ステップ数列 の z 変換

$$X(z) = \sum_{n=0}^{\infty} u(n) z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} z^{-n} = \frac{1}{1 - z^{-1}},$$

等比数列 $(|z| > 1)$

■ $x(n)=a^n u(n)$ の z 変換

$$X(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a^n z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} (az^{-1})^n = \frac{1}{1 - az^{-1}},$$

$(|z| > |a|)$

■ $x(n)=e^{-anT} u(n)$ の z 変換

$$X(z) = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-anT} z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} (e^{-aT} z^{-1})^n$$

$$= \frac{1}{1 - e^{-aT} z^{-1}} \quad \begin{array}{l} (a \text{ が実数の時、} |z| > e^{-aT}) \\ (a \text{ が虚数の時、} |z| > 1) \end{array}$$

代表的な数列の z 変換対

$x(n)$	$X(z)$	収束領域
$\delta(n)$	1	全平面
$\delta(n-m)$	z^{-m}	$z \neq 0$
$u(n)$	$\frac{1}{1 - z^{-1}}$	$ z > 1$
$a^n u(n)$	$\frac{1}{1 - az^{-1}}$	$ z > a $
$\sin(n\omega T) u(n)$	$\frac{\sin \omega T z^{-1}}{1 - 2 \cos \omega T z^{-1} + z^{-2}}$	$ z > 1$
$\cos(n\omega T) u(n)$	$\frac{1 - \cos \omega T z^{-1}}{1 - 2 \cos \omega T z^{-1} + z^{-2}}$	$ z > 1$
$n \alpha^{n-1} u(n)$	$\frac{z}{(z - \alpha)^2}$	$ z > \alpha $

z 変換のイメージ

数列の例 $x(n) = \{1, 1, 0, -2\}$ ($x(n)$ の数列、但し、 $n < 0$ では、 $x(n) = 0$ とする)

z 変換 $\rightarrow X(z) = 1 + 1 \cdot z^{-1} + 0 \cdot z^{-2} - 2 \cdot z^{-3}$

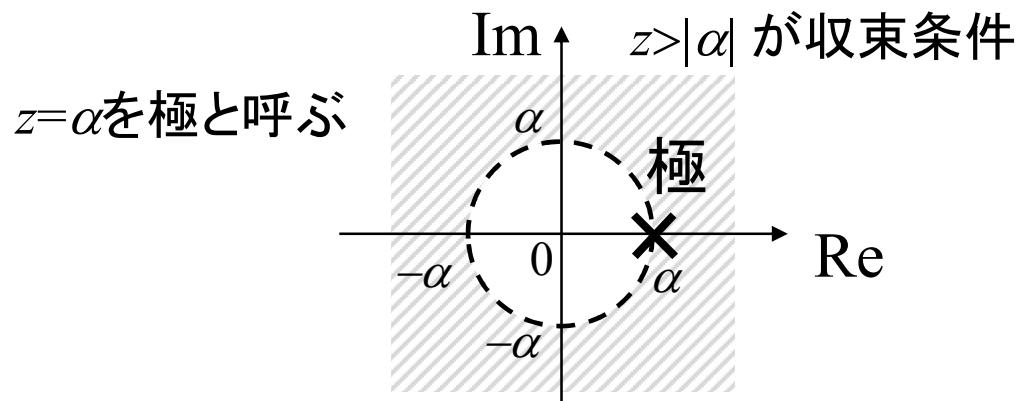
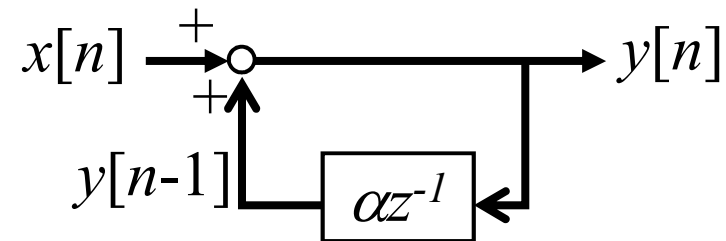
差分方程式 伝達関数 $H(z) = \frac{1}{1 - \alpha z^{-1}}$

$$Y(z) = H(z)X(z), \quad Y(z) = \alpha z^{-1} Y(z) + X(z)$$

時間領域で表現すると差分方程式

$$y[n] = \alpha y[n-1] + x[n]$$

$\alpha > 1$ なら発散、 $\alpha < 1$ なら減衰



z変換の性質と差分方程式

$x(n)$ は数列、但し、 $n < 0$ では、 $x(n)=0$ とする

線形性 $a_1 x_1(n) + a_2 x_2(n)$
 $\Leftrightarrow a_1 X_1(z) + a_2 X_2(z)$

指数数列の積

$$e^{-anT} x(n) \Leftrightarrow X(e^{aT} z)$$

畳み込みの定理

$$\mathcal{Z}^{-1}(X_1 X_2) = x_1(n) * x_2(n) = \sum_{k=0}^{\infty} x_1(k) x_2(n-k)$$

推移定理 $x(n-m) \Leftrightarrow z^{-m} X(z)$

(証明)

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}\{x(n-m)\} &= \sum_{n=0}^{\infty} x(n-m) z^{-n} \\ &= z^{-m} \sum_{n=0}^{\infty} x(n-m) z^{-(n-m)} \\ &= z^{-m} \sum_{k=-m}^{\infty} x(k) z^{-k} \\ &= z^{-m} \sum_{k=0}^{\infty} x(k) z^{-k} = z^{-m} X(z) \end{aligned}$$

($n-m=k$ とおく)

z^{-1} は単位時間
遅延演算子

逆 z 変換の導出方法 (2種類の方法)

$$X(z) = \frac{z}{3z^2 - 4z + 1} \quad \text{の逆}z\text{変換を求める}$$

部分分数展開による算出

$$X(z) = \frac{z}{3(z-1)(z-\frac{1}{3})} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{1-z^{-1}} - \frac{1}{1-\frac{1}{3}z^{-1}} \right)$$

$$\therefore x(n) = \frac{1}{2} (1 - 3^{-n}) \quad (n \geq 0)$$

$$x(0) = 0$$

$$x(1) = 1/3$$

$$x(2) = 4/9$$

$$x(3) = 13/27$$

$$x(4) = 40/81$$

...

べき級数展開による算出

$$\begin{array}{r} \frac{\frac{1}{3}z^{-1} + \frac{4}{9}z^{-2} + \frac{13}{27}z^{-3} + \frac{40}{81}z^{-4}}{3z^2 - 4z + 1} \cdot \frac{z}{z} \\ \underline{z - \frac{4}{3} + \frac{1}{3}z^{-1}} \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \frac{4}{3} - \frac{1}{3}z^{-1} \\ \underline{\frac{3}{4} - \frac{16}{9}z^{-1} + \frac{4}{9}z^{-2}} \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \frac{13}{9}z^{-1} - \frac{4}{9}z^{-2} \\ \underline{\frac{13}{9}z^{-1} - \frac{52}{27}z^{-2} + \frac{13}{27}z^{-3}} \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \frac{40}{27}z^{-2} - \frac{13}{27}z^{-3} \\ \underline{\frac{40}{27}z^{-2} - \frac{160}{81}z^{-3} + \frac{40}{81}z^{-4}} \end{array}$$

$$x(0) = 0$$

$$x(1) = 1/3$$

$$x(2) = 4/9$$

$$x(3) = 13/27$$

$$x(4) = 40/81$$

...

...

本日の演習問題

$X(z) = \frac{4z^2 - z}{2z^2 - 2z + 1}$ をべき級数展開法を用いて逆 z 変換 $x(n)$ を求めよ。
但し、 $n=3$ までで良い。

$$\begin{array}{r}
 2 + 1.5z^{-1} + 0.5z^{-2} - 0.25z^{-3} \dots \\
 2z^2 - 2z + 1 \overline{) 4z^2 - z} \\
 \underline{4z^2 - 4z + 2} \\
 3z - 2 \\
 \underline{3z - 3 + 1.5z^{-1}} \\
 1 - 1.5z^{-1} \\
 \underline{1 - z^{-1} + 0.5z^{-2}} \\
 -0.5z^{-1} - 0.5z^{-2} \\
 \underline{-0.5z^{-1} + 0.5z^{-2} - 0.25z^{-3}} \\
 \dots
 \end{array}$$

$$\begin{aligned}
 x(0) &= 2 \\
 x(1) &= 1.5 \\
 x(2) &= 0.5 \\
 x(3) &= -0.25
 \end{aligned}$$

z変換の利用 (差分方程式、積分/微分)

2階の差分方程式の一般解

$$a_1=0, a_2=1, a_{n+2}-4a_{n+1}+4a_n=0$$

$$\text{特性方程式 } x^2-4x+4=0$$

$$\text{特性方程式の解 } x=2 \text{ (重解)}$$

平行移動

$$x_0=0, x_1=1, x_{n+2}-4x_{n+1}+4x_n=0$$

z変換

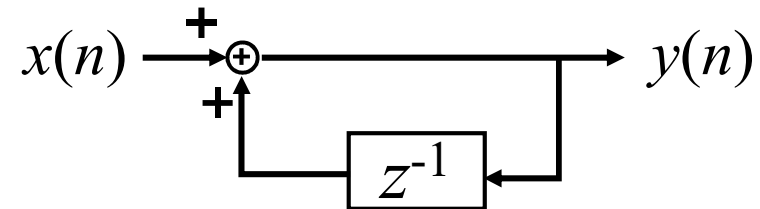
$$z^2X(z)-z-4zX(z)+4X(z)=0$$

$$X(z)=\frac{z}{(z-2)^2}$$

$$\text{逆}z\text{変換 } x_n=n\cdot 2^{n-1}$$

$$\text{よって } a_n=x_{n-1}=(n-1)\cdot 2^{n-2}$$

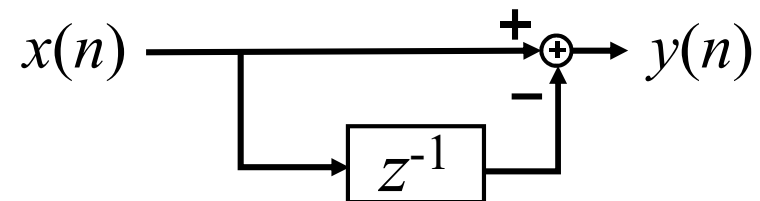
積分 (厳密には累積)



$$Y(z)=\frac{1}{1-z^{-1}}X(z)$$

$$y(n)=x(n)+y(n-1)$$

微分 (厳密には差分)



$$Y(z)=(1-z^{-1})X(z)$$

$$y(n)=x(n)-x(n-1)$$

デジタルフィルタの設計などに用いる