2017年度　第2Q　　　　　　　　　　　　　　2017年7月21日

フーリエ変換とラプラス変換

第12回講義資料

担当: 角嶋邦之
kakushima.k.aa@m.titech.ac.jp
工学院電気電子系

講義予定(全15回)

第1回	6/14	線形システムとは，周期関数の級数展開
第2回	6/16	フーリエ級数の性質
第3回	6/21	線形回路の周期波に対する定常応答
第4回	6/23	フーリエ級数の理解度確認総合演習と解説
第5回	6/28	非周期関数とフーリエ積分・フーリエ変換
第6回	6/30	フーリエ変換の存在と性質
第7回	7/5	時間領域表示と周波数領域表示，線形回路の時間応答と周波数応答
第8回	7/7	理解度の確認と解説
第9回	7/12	シャノンの標本化定理
第10回	7/14	離散フーリエ変換の基礎（定義，性質）
第11回	7/19	離散フーリエ変換の実際（帯域制限，窓関数，高速フーリエ変換，応用例）
第12回	7/21	0～∞上の関数とラプラス変換，ラプラス変換の性質
第13回	7/26	ラプラス逆変換，部分分数展開
第14回	7/28	線形回路の過渡応答，システムの安定性,電気電子システムへの応用
第15回	8/2	z変換と演習問題(テスト)

ラプラス変換の定義と逆変換

変数tについて区間[0, +∞)で定義された関数$f(t)$に対して、sをtと無関係な実数あるいは複素数として、下記の積分が存在する場合、この変換を$f(t)$のラプラス変換という。

$$\mathcal{L}(f(t)) = F(s) = \int_0^\infty f(t)e^{-st}dt$$

$F(s)$は積分が収束する場合のみ定義可能

ラプラス逆変換

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}(F(s))$$

■ $f(t) = 1$ のとき

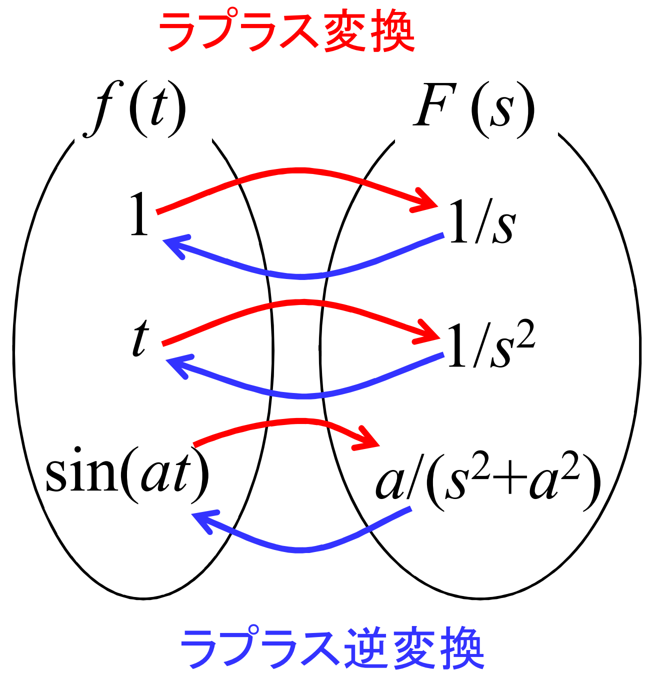
$$F(s) = \int_0^\infty 1 \cdot e^{-st}dt = \frac{1}{s} \quad (s > 0)$$

■ $f(t) = t$ のとき

$$F(s) = \int_0^\infty t \cdot e^{-st}dt = \frac{1}{s^2} \quad (s > 0)$$

■ $f(t) = \sin(at)$ のとき

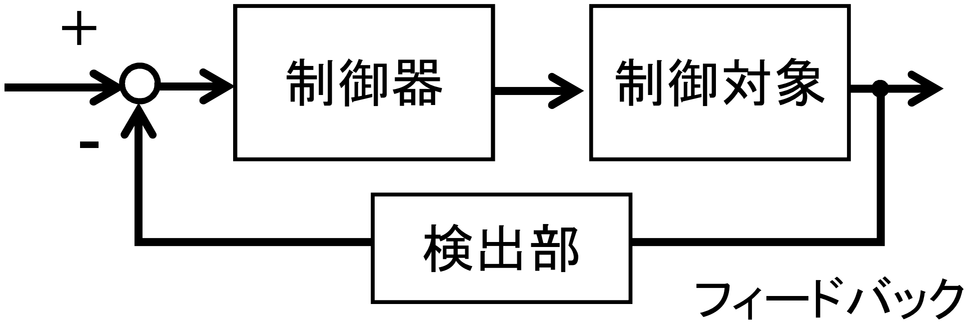
$$F(s) = \int_0^\infty \sin at \cdot e^{-st}dt = \frac{a}{s^2 + a^2} \quad (s > 0)$$



ラプラス変換はどこで用いるのか

数学的技法のひとつ。微分方程式を解き、システムの
時間応答を把握することが可能。
制御器で時間応答を自在に変える。

自動制御系への応用

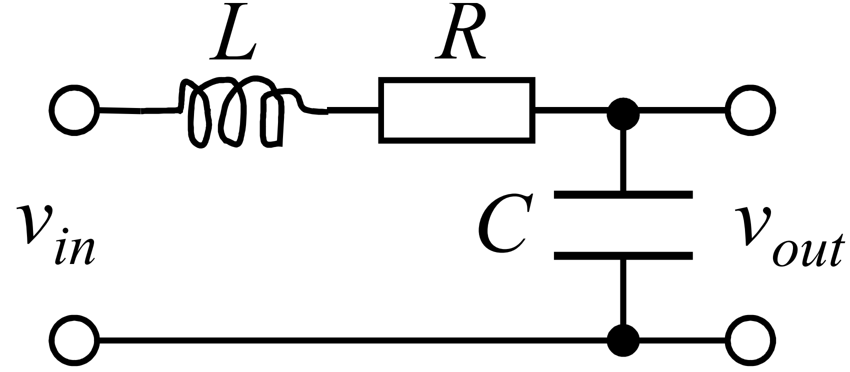


モータの回転数や位置制御

フーリエ変換との違い

	入力変数
フーリエ変換	$-\infty < t < \infty$
ラプラス変換	$0 < t$

電気回路への応用



微分方程式

$$LC\frac{d^2 v_{out}}{dt^2} + RC\frac{dv_{out}}{dt} + v_{out} = v_{in}$$

伝達関数$W(s)$ (ラプラス変換の像)

$$W(s) = \frac{1}{LCs^2 + RCs + 1}$$

過渡応答がわかる

ラプラス変換の具体例

<u>次の関数のラプラス変換を求めよ。</u>

$$f_1(t) = 3t - 2$$

$$F_1(s) = \int_0^\infty (3t-2)\cdot e^{-st}dt = 3\int_0^\infty t\cdot e^{-st}dt - 2\int_0^\infty 1\cdot e^{-st}dt$$

よって

$$F_1(s) = \frac{3}{s^2} - \frac{2}{s}$$

$(s>0)$

<u>次の関数のラプラス変換が存在する s の範囲を調べよ。</u>

$$f_2(t) = \exp(-t^2)$$

$$\int_0^T \exp(-t^2)\exp(-st)dt = \int_0^T \exp(-t^2 - st)dt$$

$t > 1 - s,$ 且つ $t > 0$ であるような t に対しては、$(t+s)t>t$ となる

$1 - s$ と 0 の大きい方をt_0 とすると

$$\int_{t_0}^T \exp(-t^2 - st)dt < \int_{t_0}^T \exp(-t)dt = e^{-t_0} - e^{-T}$$

$T \to \infty$ で収束するため、
$-\infty < s < \infty$ で存在する

本日の演習問題①

次の関数のラプラス変換を求めよ。

(1) $f(t)=e^{2t}$

$$F(s)=\int_0^\infty e^{2t}\cdot e^{-st}dt=\left[\frac{e^{(2-s)t}}{2-s}\right]_0^\infty=\frac{1}{s-2}$$

(2) $f(t)=\cos\omega t$

$$F(s)=\int_0^\infty \cos\omega t\cdot e^{-st}dt=\left[-\frac{1}{s}e^{-st}\cos\omega t\right]_0^\infty-\int_0^\infty\frac{1}{s}e^{-st}\cdot\omega\sin\omega t dt$$

$$=\frac{1}{s}-\frac{\omega}{s}\int_0^\infty e^{-st}\cdot\sin\omega t dt$$

$$=\frac{1}{s}-\frac{\omega}{s}\left\{\left[-\frac{1}{s}e^{-st}\sin\omega t\right]_0^\infty-\int_0^\infty\frac{1}{s}e^{-st}\cdot\omega\cos\omega t dt\right\}$$

$$=\frac{1}{s}-\frac{\omega^2}{s^2}\int_0^\infty e^{-st}\cdot\cos\omega t dt$$

※$F(s)$がでてくる

よって $F(s)=\dfrac{s}{s^2+\omega^2}$

ラプラス変換の基本法則

$\mathcal{L}(f(t))=F(s)$, $\mathcal{L}(g(t))=G(s)$ とする。λ, μ は定数。

線形法則

$$\mathcal{L}(\lambda f(t)+\mu g(t))=\lambda F(s)+\mu G(s)$$

相似法則

$$\mathcal{L}(f(\lambda t)) = \frac{1}{\lambda}F\left(\frac{s}{\lambda}\right) \quad (\lambda>0)$$

移動法則

$$\mathcal{L}(f(t-\lambda))=e^{-\lambda s}F(s)$$

$$\mathcal{L}(f(t+\lambda)) = e^{\lambda s}\left\{F(s)-\int_0^{\lambda} e^{-st} f(t)dt\right\}$$

像の移動法則

$$\mathcal{L}(e^{\mu t}f(t))=F(s-\mu)$$

積分法則

$$\mathcal{L}\left(\int_0^t f(\tau)d\tau\right)=\frac{1}{s}F(s)$$

像の積分法則

$$\mathcal{L}\left(\frac{f(t)}{t}\right)=\int_s^{\infty} F(\sigma)d\sigma$$

微分法則

$$\mathcal{L}(f'(t))=sF(s)-f(+0)$$

像の微分法則

$$\mathcal{L}(-t f(t))=F'(s)$$

畳み込み

$$\mathcal{L}(f * g) = \mathcal{L}(f)\,\mathcal{L}(g)$$

相似法則の証明

$$\mathcal{L}(f(\lambda t)) = \int_0^\infty e^{-st} f(\lambda t) dt = \frac{1}{\lambda}\int_0^\infty e^{-\frac{s}{\lambda}\tau} f(\tau) d\tau = \frac{1}{\lambda} F\left(\frac{s}{\lambda}\right)$$

(変数変換 $\lambda t=\tau$ を利用)

移動法則の証明

$$\mathcal{L}(f(t\text{-}\lambda)) = \int_0^\infty e^{-st} f(t-\lambda) dt = \int_0^\infty e^{-s(\lambda+\tau)} f(\tau) d\tau = e^{-s\lambda} F(s)$$

(置換 $t\text{-}\lambda=\tau$ を利用, $t>0$)

像の移動法則の証明

$$\mathcal{L}(e^{\mu t} f(t)) = \int_0^\infty e^{-st} e^{\mu t} f(t) dt = F(s-\mu)$$

微分法則の証明

$$\mathcal{L}\left(f'(t)\right)=\int_0^\infty \frac{df(t)}{dt}e^{-st}dt \quad =\left[f(t)e^{-st}\right]_0^\infty+s\int_0^\infty f(t)e^{-st}dt$$

$$=-f(0)+sF(s)$$

積分法則の証明

$f(t)$の積分を $g(t)=\int_0^t f(\tau)d\tau$ とすると、 $f(t)=\dfrac{dg(t)}{dt}$

微分定理より $F(s)=\mathcal{L}\left[\dfrac{dg(t)}{dt}\right]=sG(s)-g(0)$

よって $G(s)=\dfrac{1}{s}F(s)$

像の微分法則の証明

$$\frac{dF(s)}{ds}=\frac{d}{ds}\int_0^\infty e^{-st}f(t)dt=\int_0^\infty \frac{\partial}{\partial s}\left(e^{-st}f(t)\right)dt$$

※微分と無限積分を入れ替えられる場合

$$=\int_0^\infty e^{-st}\left(-tf(t)\right)dt=\mathcal{L}\left(-tf(t)\right)$$

合成法則

$\mathcal{L}(f * g) = \mathcal{L}(f)\,\mathcal{L}(g)$　下記、証明する

$$f * g = \int_0^\infty f(t-\tau)g(\tau)d\tau$$ となるので、

$$\mathcal{L}\left(f * g\right) = \int_0^\infty \left\{ \int_0^\infty f(t-\tau)g(\tau)d\tau \right\} e^{-st}dt$$

移動法則
$\mathcal{L}(f(t-\lambda))=e^{-\lambda s}F(s)$

$$= \int_0^\infty g(\tau) \left\{ \int_0^\infty f(t-\tau)e^{-st}dt \right\} d\tau = \int_0^\infty g(\tau)e^{-s\tau}F(s)d\tau = F(s)G(s)$$

<u>計算例</u>　$f(t) = t,\ g(t) = e^t$ の合成積を求める

$$F(s) = \frac{1}{s^2},\quad G(s) = \frac{1}{s-1},\quad F(s)G(s) = \frac{1}{s^2(s-1)}$$

$$\mathcal{L}(f * g) = \mathcal{L}\left(e^{-t} - t - 1\right) = \frac{1}{s^2(s-1)}$$

同じ

ラプラス変換表

$f(t)=\mathcal{L}^{-1}(F(s))$	$F(s)=\mathcal{L}(f(t))$
1	$\frac{1}{s}$ $(s>0)$
t $(t>0)$	$\frac{1}{s^2}$ $(s>0)$
$\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}$ nは自然数 $(t>0)$	$\frac{1}{s^n}$ $(s>0)$
$\frac{1}{\sqrt{\pi t}}$ $(t>0)$	$\frac{1}{\sqrt{s}}$ $(s>0)$
$e^{\lambda t}$ $(t\geqq 0)$	$\frac{1}{s-\lambda}$ $(s>\lambda)$
$\cos\lambda t$ $(t\geqq 0)$	$\frac{s}{s^2+\lambda^2}$ $(s>0)$
$\sin\lambda t$ $(t\geqq 0)$	$\frac{\lambda}{s^2+\lambda^2}$ $(s>0)$

$f(t), g(t)$	$F(s), G(s)$
$af(t)+bg(t)$	$aF(s)+bG(s)$
$f(at)$	$(1/a)F(s/a)$
$e^{-at}f(t)$	$F(s+a)$
$df(t)/dt$	$sF(s)-f(0)$
$-t\,f(t)$	$dF(s)/ds$
$\int_0^t f(\tau)d\tau$	$\frac{1}{s}F(s)$
$\int_0^t f(t-\tau)g(\tau)d\tau$	$F(s)\cdot G(s)$

本日の演習問題②

(3) 次の関数のラプラス変換を求めよ。

$$f(t)=\begin{cases}0 & (0 \leqq t<3)\\ (t-3)^2 & (3 \leqq t)\end{cases}$$

解

まず、以下のt^2 ラプラス変換を考える

$$\mathcal{L}(t^2)=\int_0^\infty t^2 e^{-st}dt=\left[-\frac{t^2}{s}e^{-st}\right]_0^\infty+\frac{2}{s}\int_0^\infty te^{-st}dt$$

$$=\frac{2}{s}\left[-\frac{t}{s}e^{-st}\right]_0^\infty+\frac{2}{s^2}\int_0^\infty e^{-st}dt$$

$$=\frac{2}{s^2}\int_0^\infty e^{-st}dt=\frac{2}{s^3}$$

移動法則を利用すると

$$\mathcal{L}\{(t-3)^2\}=e^{-3s}\mathcal{L}(t^2)=\frac{2e^{-3s}}{s^3}$$

(4) 次の関数のラプラス逆変換を求めよ。

$$F(s)=\frac{s}{(s-2)^2+1}$$

解

$$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{s}{(s-2)^2+1}\right)$$

$$=\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{s-2}{(s-2)^2+1}+\frac{2}{(s-2)^2+1}\right)$$

$$=e^{2t}(\cos t+2\sin t)$$

常微分方程式の解法

変数tの関数$x(t)$のn階の常微分方程式 $x^{(n)}=f\{t, x, x', \ldots, x^{(n-1)}\}$ の一般解はn個の任意定数を含む。tの特定のt_0に対して、$x(t_0)=c_0, x'(t_0)=c_1, \ldots, x^{(n-1)}(t_0)=c_{n-1}$ であるような特殊解を求める。

計算例①

$$x'+2x=e^{-t}, x(0)=3$$

ラプラス変換で像方程式を導出

$$sX-x(0)+2X=\frac{1}{s+1}$$

Xについて解く

$$X=\frac{1}{s+2}\left(3+\frac{1}{s+1}\right)=\frac{2}{s+2}+\frac{1}{s+1}$$

両辺のラプラス逆変換

$$x=\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{2}{s+2}\right)+\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s+1}\right)$$

$$=e^{-2t}+e^{-t}$$

計算例②

$$x'+\lambda x=f(x), x(0)=a$$

ラプラス変換で像方程式を導出

$$sX-x(0)+\lambda X=F(s)$$

Xについて解く

$$X=\frac{a}{s+\lambda}+\frac{F(s)}{s+\lambda}$$

合成法則を用いて、両辺のラプラス逆変換

$$x(t)=ae^{-\lambda t}+\int_0^t e^{-\lambda(t-\tau)}f(\tau)d\tau$$

本日の演習問題③　次の微分方程式をラプラス変換を用いて解け。

(5)

$$\begin{cases} x''+6x'+10x=0 \\ x(0)=x'(0)=2 \end{cases}$$

ラプラス変換

$$s^2X-sx(0)-x'(0)+6\{sX-x(0)\}+10X=0$$

Xについて解く

$$(s^2+6s+10)X=2(s+7)$$

$$X=\frac{2(s+3)}{(s+3)^2+1}+\frac{8}{(s+3)^2+1}$$

両辺のラプラス逆変換

$$x(t)=2e^{-3t}(\cos t+4\sin t)$$

(6)

$$\begin{cases} x''+\lambda^2 x=f(t) \\ \lambda\neq 0,\ x(0)=a,\ x'(0)=b \end{cases}$$

ラプラス変換

$$s^2X-sx(0)-x'(0)+\lambda^2X=F(s)$$

Xについて解く

$$(s^2+\lambda^2)X=as+b+F(s)$$

$$X=\frac{as}{s^2+\lambda^2}+\frac{b}{s^2+\lambda^2}+\frac{F(s)}{s^2+\lambda^2}$$

両辺のラプラス逆変換 (合成法則を用いる)

$$x(t)=a\cos\lambda t+\frac{b}{\lambda}\sin\lambda t+\frac{1}{\lambda}\int_0^t \sin\lambda(t-\tau)\cdot f(\tau)d\tau$$

連立常微分方程式の解法

$$\begin{cases} x' + y' + x = -e^{-t}, & x(0) = -1 \\ x' + 2y' + 2x + 2y = 0, & y(0) = 1 \end{cases}$$

<u>ラプラス変換で像方程式を導出</u>

$$\begin{cases} sX + 1 + sY - 1 + X = -\dfrac{1}{s+1} \\ sX + 1 + 2(sY - 1) + 2X + 2Y = 0 \end{cases}$$

<u>X, Y について解く</u>

$$\begin{cases} (s+1)X + sY = -\dfrac{1}{s+1} \\ (s+2)X + 2(s+1)Y = 1 \end{cases}$$

$$X = -\frac{s+2}{s^2+2s+2} = -\frac{(s+1)+1}{(s+1)^2+1}$$

$$Y = -\frac{s^2+3s+3}{(s^2+2s+2)(s+1)} = \frac{1}{s+1} + \frac{1}{s^2+2s+2}$$

<u>両辺のラプラス逆変換</u>

$$x(t) = -e^{-t}(\cos t + \sin t)$$
$$y(t) = e^{-t}(1 + \sin t)$$

常微分方程式の境界値問題

境界値

$$x''-3x'+2x=0,\quad x(0)=0,\ x(1)=1$$

解法

$x'(0)=c$ とおく

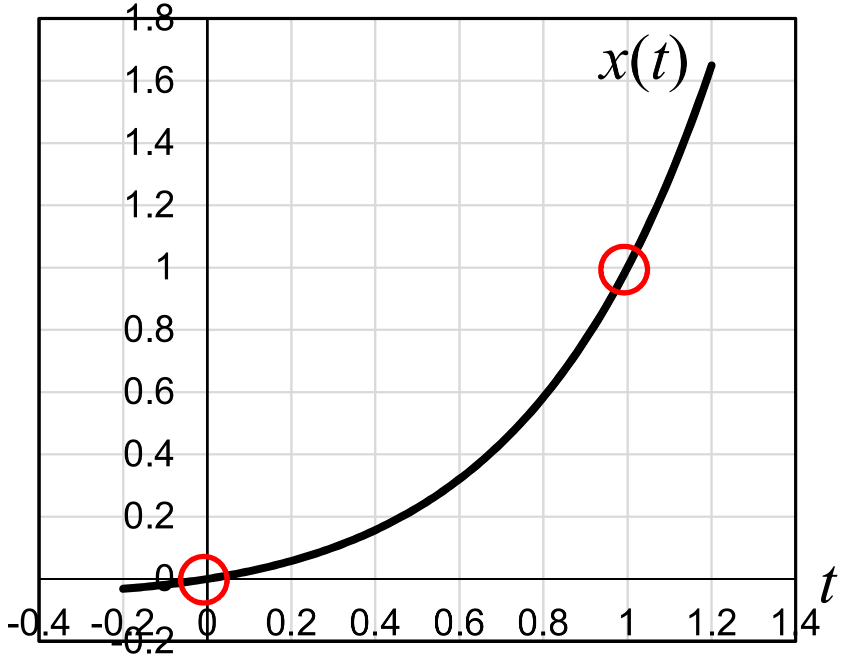
ラプラス変換で像方程式を導出

$$s^2X-c-3sX+2X=0$$

$$X=\frac{c}{s^2-3s+2}=\frac{c}{s-2}-\frac{c}{s-1}$$

原関数は

$$x(t)=c\left(e^{2t}-e^t\right)$$



$x(1)=1$ であるから

$$c=\frac{1}{e^2-e}$$

よって

$$x(t)=\frac{e^{2t}-e^t}{e^2-e}$$