2017年度　第2Q　　　　　　　　　　　　　　　　2017年7月14日

フーリエ変換とラプラス変換

<u>第10回講義資料</u>

担当: 角嶋邦之
kakushima.k.aa@m.titech.ac.jp
工学院電気電子系

講義予定(全15回)

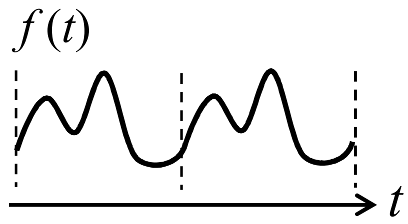
第1回	6/14	線形システムとは，周期関数の級数展開
第2回	6/16	フーリエ級数の性質
第3回	6/21	線形回路の周期波に対する定常応答
第4回	6/23	フーリエ級数の理解度確認総合演習と解説
第5回	6/28	非周期関数とフーリエ積分・フーリエ変換
第6回	6/30	フーリエ変換の存在と性質
第7回	7/5	時間領域表示と周波数領域表示，線形回路の時間応答と周波数応答
第8回	7/7	理解度の確認と解説

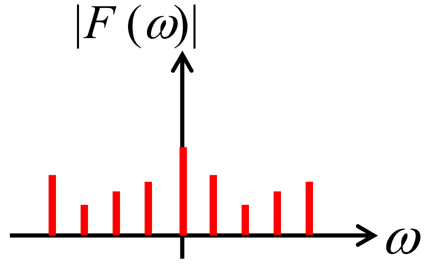
第9回	7/12	シャノンの標本化定理
第10回	7/14	離散フーリエ変換の基礎（定義，性質）
第11回	7/19	離散フーリエ変換の実際（帯域制限，窓関数，高速フーリエ変換，応用例）
第12回	7/21	0～∞上の関数とラプラス変換，ラプラス変換の性質
第13回	7/26	ラプラス逆変換，部分分数展開
第14回	7/28	線形回路の過渡応答，システムの安定性,電気電子システムへの応用
第15回	8/2	z変換と演習問題(テスト)

関数のフーリエ変換、逆変換

■周期関数 $f(t)$ のフーリエ級数展開 → 周波数のみ離散的

$$f(t)=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}\left\{a_k\cos\left(\frac{2\pi kt}{T}\right)+b_k\sin\left(\frac{2\pi kt}{T}\right)\right\}$$



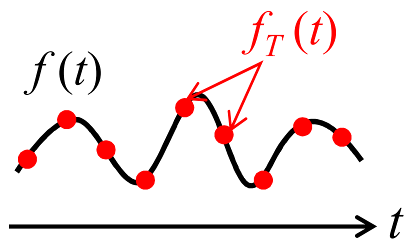


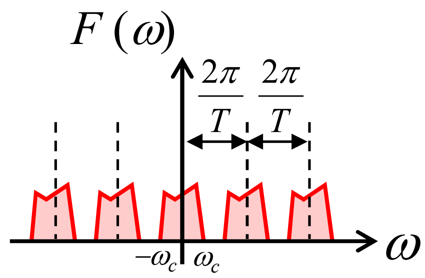
■ 非周期関数 $f(t)$ を T でサンプリングした関数 $f_T(t)$ → $F[f_T(t)]$ は周期的で連続

$$F[f_T(t)]=F(\omega)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}f(nT)e^{-inT\omega}$$

$$f(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi/T}^{\pi/T}F(\omega)e^{i\frac{2\pi}{T}t}d\omega=\sum_{n=-\infty}^{\infty}f(nT)\frac{\sin\pi\left(\frac{t}{T}-n\right)}{\pi\left(\frac{t}{T}-n\right)}$$

$f_T(t)$ でなく $f(t)$ が導出される (中心の1周期分)





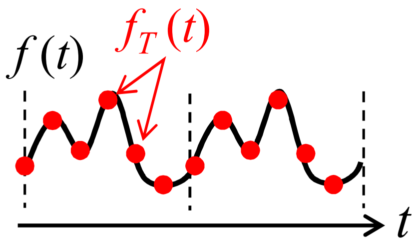
■サンプリング値関数 $f_T(t)$ が周期的: $f(n)$ → $F[f(n)]$ は周期的で離散的

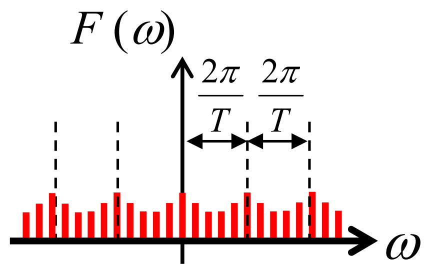
$$F(k)=\sum_{n=0}^{N-1}f(n)e^{-i2\pi kn/N}$$

離散フーリエ変換 (DFT)
Discrete Fourier Transform

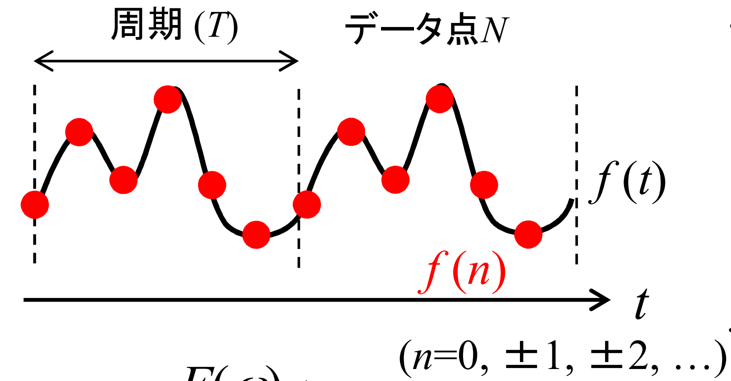
$$f(n)=\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}F(k)e^{i2\pi kn/N}$$

逆離散フーリエ変換 (IDFT)
Inverse Discrete Fourier Transform



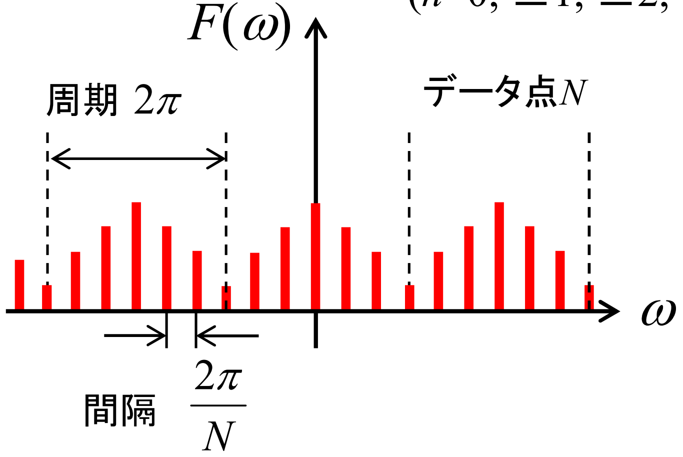


逆離散フーリエ変換の導出



離散時間関数$f(n)$の逆離散時間フーリエ変換

$$f(n)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}F(\omega)e^{i\frac{2\pi}{T}n}d\omega$$



$f(n)$は周期関数のため、$F(\omega)$は離散的になる

$$F(\omega)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}c_k\delta\left(\omega-\frac{2\pi k}{N}\right)$$

但し、$c_k=c_{k+N}$

これを上の式に代入する

$$f(n)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\sum_{k=-\infty}^{\infty}c_k\delta\left(\omega-\frac{2\pi k}{N}\right)e^{i\frac{2\pi}{T}n}d\omega$$

周期2πの中にN本のデルタ関数が存在するので
連続するN個のkについて総和をとることになる。

$$f(n)=\frac{1}{2\pi}\sum_{k=0}^{N-1}c_k e^{i\frac{2\pi}{T}n}$$

ここで、$c_k=\frac{2\pi}{N}F(k)$ とおき、$f(n)=\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}F(k)e^{i\frac{2\pi}{N}kn}$ を逆離散フーリエ変換とする。

離散フーリエ変換

離散時間(サンプリング値)関数 $f(n)$の離散時間フーリエ変換

T=1 とすると

$$F(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n) e^{-i\omega n}$$

ωの値は 2πk/N (k=0,1,2, …, N-1)となるため、
新たに$F(k)$を導入する

$$F(k) = \sum_{n=0}^{N-1} f(n) e^{-i\frac{2\pi}{N}kn}$$

離散フーリエ変換 (DFT)
Discrete Fourier Transform

逆離散フーリエ変換で、確認すると

$$f(n) = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} F(k) e^{i\frac{2\pi}{N}kn} = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}\left\{\sum_{m=0}^{N-1} f(m) e^{-i\frac{2\pi}{N}km}\right\} e^{i\frac{2\pi}{N}kn}$$

$$= \frac{1}{N}\sum_{m=0}^{N-1} f(m) \sum_{k=0}^{N-1} e^{i\frac{2\pi}{N}k(n-m)} = \frac{1}{N}\sum_{m=0}^{N-1} f(m) N \delta_{m,n} \quad \left(= f(n) \right)$$

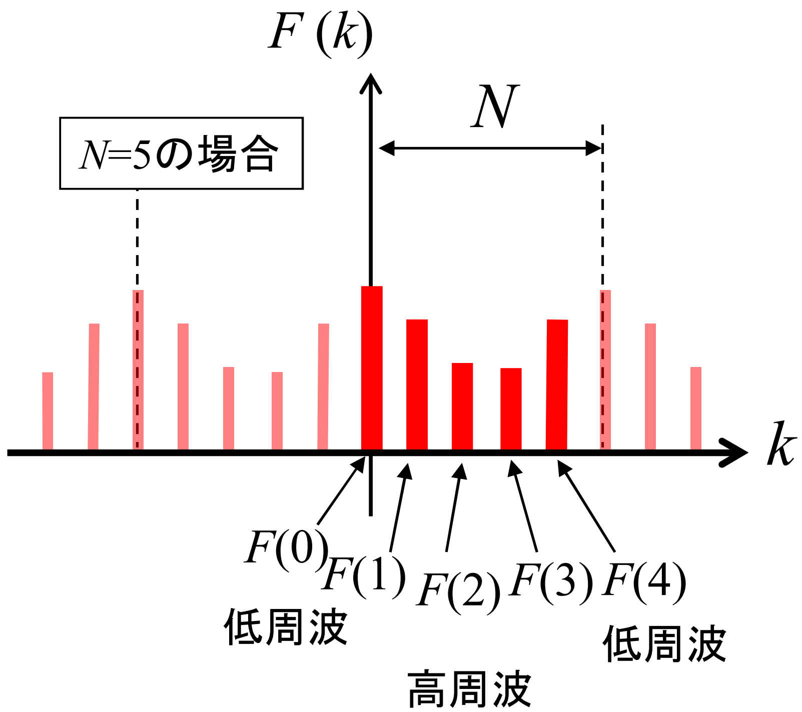
	解析対象	工学的な利用
フーリエ級数	無限長の周期関数	理論上の解析
フーリエ変換	無限長の非周期関数	理論上の解析
離散フーリエ変換	有限長の離散信号	デジタル信号の解析

$$f(t) \leftrightarrow F(\omega)$$

$$f(n) \leftrightarrow F(k)$$

離散フーリエ変換の描像

$$F(k)=\sum_{n=0}^{N-1} f(n) e^{-i\frac{2\pi}{N}kn}$$



スペクトルについて

$F(k)=a_k + ib_k$

$|F(k)|$: 振幅スペクトル

$$F(k)=\sqrt{\mathrm{Re}(F(k))^2+\mathrm{Im}(F(k))^2}=\sqrt{a_k^2+b_k^2}$$

$\angle F(k)$: 位相スペクトル

$$\angle F(k)=\tan^{-1}\left(\frac{\mathrm{Im}(F(k))}{\mathrm{Re}(F(k))}\right)=\tan^{-1}\left(\frac{b_k}{a_k}\right)$$

$|F(k)|^2$: パワースペクトル

$$|F(k)|^2=\mathrm{Re}(F(k))^2+\mathrm{Im}(F(k))^2$$
$$=a_k^2+b_k^2$$

$k=N/2$に近づくと高周波成分

離散フーリエ変換の計算例

下記の離散信号の離散フーリエ変換を求める

$$f(n) = \cos\left(\frac{2\pi}{N}k_0 n\right)$$

k_0: 角周波数

オイラーの公式を利用すると

$$F(k) = \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{N-1}\left\{e^{i\left(\frac{2\pi}{N}k_0 n\right)} + e^{-i\left(\frac{2\pi}{N}k_0 n\right)}\right\}e^{-i\frac{2\pi}{N}kn}$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{N-1}\left\{e^{i\frac{2\pi}{N}n(k_0-k)} + e^{-i\frac{2\pi}{N}n(k_0+k)}\right\}$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{N-1}\left\{e^{i\frac{2\pi}{N}n(k_0-k)} + e^{i\frac{2\pi}{N}n(N-k_0-k)}\right\}$$

$\left\{e^{i2\pi n} = 1\right\}$

を利用

離散フーリエ変換の計算例 (つづき)

(N=8 の例)

第1項

$k = k_0$ のとき

$$\sum_{n=0}^{N-1} e^{i\frac{2\pi}{N}n(k_0-k)} = \sum_{n=0}^{N-1} 1 = N$$

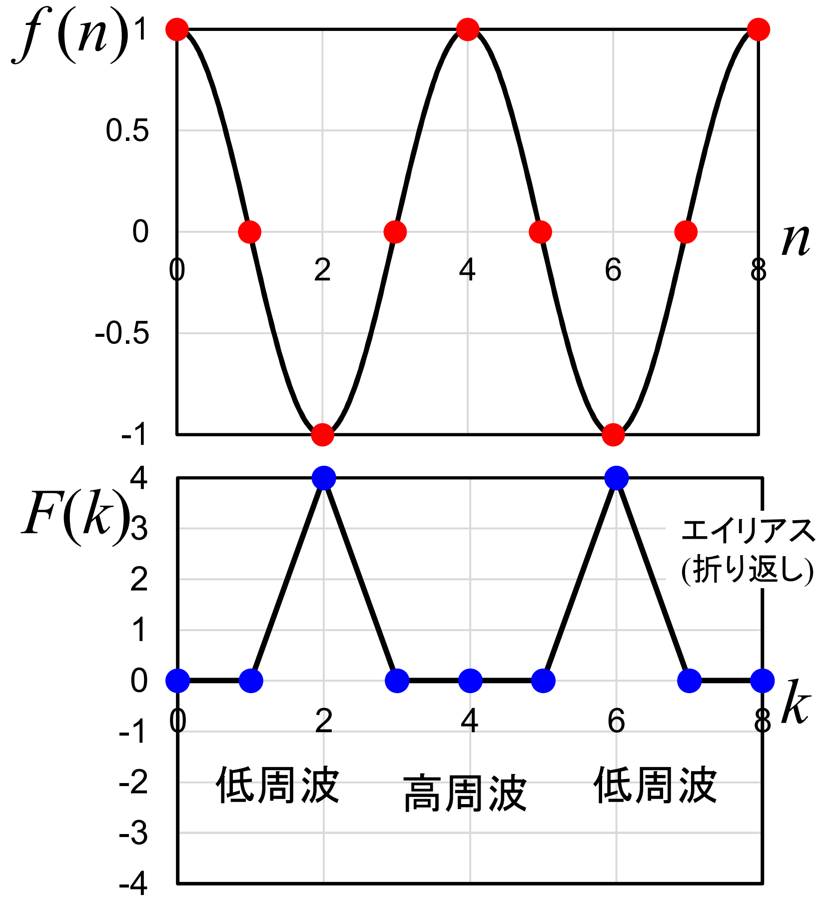
$k \neq k_0$ のとき

cos(2π)=1

$$\sum_{n=0}^{N-1} e^{i\frac{2\pi}{N}n(k_0-k)} = \frac{1-e^{i\frac{2\pi}{N}N(k_0-k)}}{1-e^{i\frac{2\pi}{N}(k_0-k)}} = 0$$

よって $$\sum_{n=0}^{N-1} e^{i\frac{2\pi}{N}n(k_0-k)} = N\delta_{k_0,k}$$

k_0=2の時の離散フーリエ変換の様子



第2項 $k = N - k_0$ のとき

$$\sum_{n=0}^{N-1} e^{i\frac{2\pi}{N}n(N-k_0-k)} = \sum_{n=0}^{N-1} 1 = N$$

よって $$\sum_{n=0}^{N-1} e^{i\frac{2\pi}{N}n(N-k_0-k)} = N\delta_{N-k_0,k}$$

離散フーリエ変換の具体例

次の4点のデジタル信号を離散フーリエ変換した際の周波数スペクトルを求める。

$$f(n) = \begin{cases} 1 \ (n=0) \\ 1 \ (n=1) \\ 0 \ (n=2) \\ 1 \ (n=3) \\ 0 \ (n \neq 0,1,2,3) \end{cases}$$

$$F(k) = \sum_{n=0}^{N-1} f(n) e^{-i\frac{2\pi}{N}kn}$$ を利用して計算する (但し、N=4)

オイラーの公式

$$e^{-i\frac{\pi}{2}kn} = \cos\left(\frac{\pi}{2}kn\right) - i\sin\left(\frac{\pi}{2}kn\right)$$

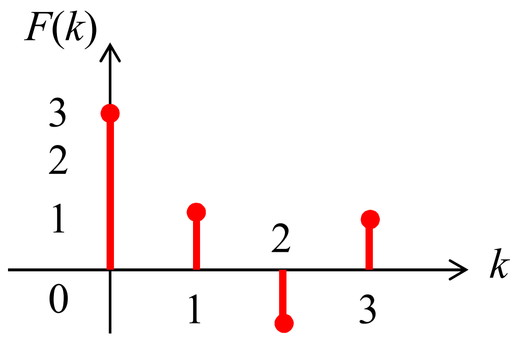
$$\begin{cases} e^{0} = e^{-i2\pi} = e^{-i4\pi} = 1 \\ e^{-i\frac{\pi}{2}} = e^{-i\frac{5\pi}{2}} = e^{-i\frac{9\pi}{2}} = -i \\ e^{-i\pi} = e^{-i3\pi} = e^{-i5\pi} = -1 \\ e^{-i\frac{3\pi}{2}} = e^{-i\frac{7\pi}{2}} = e^{-i\frac{11\pi}{2}} = i \end{cases}$$

$$F(0) = \sum_{n=0}^{N-1} f(n) = f(0) + f(1) + f(2) + f(3) = 3$$

$$F(1) = f(0) + f(1)e^{-i\frac{\pi}{2}} + f(2)e^{-i\frac{2\pi}{2}} + f(3)e^{-i\frac{3\pi}{2}} = 1 - i + 0 + i = 1$$

$$F(2) = f(0) + f(1)e^{-i\pi} + f(2)e^{-i2\pi} + f(3)e^{-i3\pi} = 1 - 1 + 0 - 1 = -1$$

$$F(3) = f(0) + f(1)e^{-i\frac{3\pi}{2}} + f(2)e^{-i\frac{6\pi}{2}} + f(3)e^{-i\frac{9\pi}{2}} = 1 + i + 0 - i = 1$$



本日の演習問題 1

次の4点のデジタル信号を離散フーリエ変換した際の周波数スペクトル$F(k)$、振幅スペクトル$|F(k)|$、位相スペクトル$\angle F(k)$を求めよ。

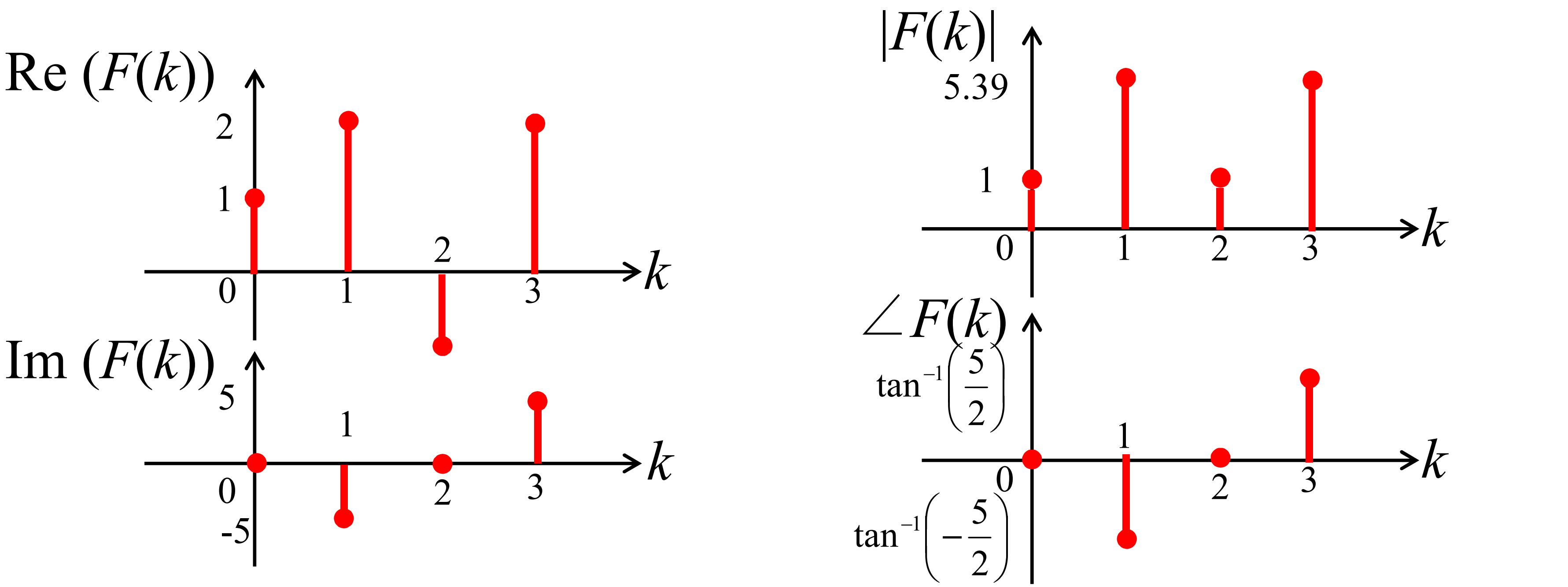
$$f(n) = \begin{cases} 1 & (n=0) \\ 3 & (n=1) \\ -1 & (n=2) \\ -2 & (n=3) \\ 0 & (n \neq 0,1,2,3) \end{cases}$$

$$F(0) = \sum_{n=0}^{N-1} f(n) = f(0) + f(1) + f(2) + f(3) = 1$$

$$F(1) = f(0) + f(1)e^{-i\frac{\pi}{2}} + f(2)e^{-i\frac{2\pi}{2}} + f(3)e^{-i\frac{3\pi}{2}} = 2 - 5i$$

$$F(2) = f(0) + f(1)e^{-i\pi} + f(2)e^{-i2\pi} + f(3)e^{-i3\pi} = -1$$

$$F(3) = f(0) + f(1)e^{-i\frac{3\pi}{2}} + f(2)e^{-i\frac{6\pi}{2}} + f(3)e^{-i\frac{9\pi}{2}} = 2 + 5i$$



離散フーリエ変換の性質

(1) 線形性

$$a_1 f_1(n) + a_2 f_2(n) \leftrightarrow a_1 F_1(k) + a_2 F_2(k)$$

(2) 周期性

$$F(k+rN)=F(k)$$

(但し、rは任意の整数)

(3) 循環推移

$$f(n-m) \leftrightarrow F(k)e^{-i\frac{2\pi}{N}km}$$

$$f(n+m) \leftrightarrow F(k)e^{i\frac{2\pi}{N}km}$$

(4) 時間反転

$$f(-n) \leftrightarrow F(-k)$$

(5) 対称性

$$F^*(k) = F(-k) = F(N-k)$$

(*は共役複素数)

離散フーリエ変換の循環推移の証明

$$F(n-m)=\sum_{n=0}^{N-1} f(n-m)e^{-i\frac{2\pi}{N}kn}=\sum_{n=0}^{N-1} f(n-m)e^{-i\frac{2\pi}{N}k(n-m)}e^{-i\frac{2\pi}{N}km}$$

$n-m=n'$ とおく

$$=e^{-i\frac{2\pi}{N}km}\sum_{n'=-m}^{N-1-m} f(n')e^{-i\frac{2\pi}{N}kn'}=e^{-i\frac{2\pi}{N}km}\left\{\sum_{n'=-m}^{-1} f(n')e^{-i\frac{2\pi}{N}kn'}+\sum_{n'=0}^{N-1-m} f(n')e^{-i\frac{2\pi}{N}kn'}\right\}$$

括弧内の第一項は、$l=n'+N$ とおくと

$$\sum_{n'=-m}^{-1} f(n')e^{-i\frac{2\pi}{N}kn'}=\sum_{l=N-m}^{N-1} f(l-N)e^{-i\frac{2\pi}{N}k(l-N)}=\sum_{l=N-m}^{N-1} f(l)e^{-i\frac{2\pi}{N}kl}=\sum_{n=N-m}^{N-1} f(n)e^{-i\frac{2\pi}{N}kn}$$

したがって、

$$F(n-m)=e^{-i\frac{2\pi}{N}km}\left\{\sum_{n=N-m}^{N-1} f(n)e^{-i\frac{2\pi}{N}kn}+\sum_{n=0}^{N-1-m} f(n)e^{-i\frac{2\pi}{N}kn}\right\}$$

$$=e^{-i\frac{2\pi}{N}km}\sum_{n=0}^{N-1} f(n)e^{-i\frac{2\pi}{N}kn}=e^{-i\frac{2\pi}{N}km}F(k)$$

本日の演習問題 2

離散フーリエ変換の時間反転　$f(-t) \leftrightarrow F(-k)$ を証明せよ。

$$\sum_{n=0}^{N-1} f(-n) e^{-i\frac{2\pi}{N}kn} = \sum_{n=0}^{N-1} f(N-n) e^{-i\frac{2\pi}{N}kn} = \sum_{n=0}^{N-1} f(N-n) e^{i\frac{2\pi}{N}k(N-n)}$$

$n' = N - n$ とおくと

$$\sum_{n'=N}^{1} f(n') e^{i\frac{2\pi}{N}kn'} = \sum_{n=1}^{N} f(n) e^{i\frac{2\pi}{N}kn}$$

$f(n)$ の周期性を考慮すると

$$\sum_{n=1}^{N} f(n) e^{i\frac{2\pi}{N}kn} = \sum_{n=0}^{N-1} f(n) e^{i\frac{2\pi}{N}kn} = \sum_{n=0}^{N-1} f(n) e^{-i\frac{2\pi}{N}(-k)n} = F(-k)$$

離散フーリエ変換の対称性の証明

$$F^*(k) = [F(k)]^* = \left[\sum_{n=0}^{N-1} f(n) e^{-i\frac{2\pi}{N}kn}\right]^* = \left[\sum_{n=0}^{N-1} f(n) e^{i\frac{2\pi}{N}kn}\right] = F(-k)$$

なぜなら $\{\ \cos(\omega_0 t) + i\sin(\omega_0 t)\ \}^* = \cos(\omega_0 t) - i\sin(\omega_0 t)$

$$F(N-k) = \sum_{n=0}^{N-1} f(n) e^{-i\frac{2\pi}{N}(N-k)n}$$

$$= \sum_{n=0}^{N-1} f(n) e^{i\frac{2\pi}{N}kn} = F(-k)$$

よって　$F^*(k) = F(-k) = F(N-k)$

離散フーリエ変換の行列表記

$$W_N^{kn} = e^{-i\frac{2\pi}{N}kn}$$ とおくと、 $$F(k) = \sum_{n=0}^{N-1} f(n) W_N^{kn}$$ となる。

$(k=0, 1, \ldots, N\text{-}1)$

$$W = \begin{bmatrix} W_N^0 & W_N^0 & \cdots & W_N^0 \\ W_N^0 & W_N^1 & \cdots & W_N^{N-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ W_N^0 & W_N^{N-1} & \cdots & W_N^{(N-1)(N-1)} \end{bmatrix}$$

とおくと

$$F(k) = Wf(n)$$

一方、逆離散フーリエ変換は

$$f(n) = W^{-1}F(k)$$

行列Wの特徴

$$[W]_{nk} = [W]_{kn}, \quad W = W^T, \quad W^{-1} = W^*$$ (共役複素数)

計算するためには、N^2回の乗算と$N(N\text{-}1)$の加算をする必要がある