フーリエ変換とラプラス変換

第13回講義資料

担当: 角嶋邦之
kakushima.k.aa@m.titech.ac.jp
工学院電気電子系

講義予定(全15回)

第1回	6/14	線形システムとは，周期関数の級数展開
第2回	6/16	フーリエ級数の性質
第3回	6/21	線形回路の周期波に対する定常応答
第4回	6/23	フーリエ級数の理解度確認総合演習と解説
第5回	6/28	非周期関数とフーリエ積分･フーリエ変換
第6回	6/30	フーリエ変換の存在と性質
第7回	7/5	時間領域表示と周波数領域表示，線形回路の時間応答と周波数応答
第8回	7/7	理解度の確認と解説
第9回	7/12	シャノンの標本化定理
第10回	7/14	離散フーリエ変換の基礎（定義，性質）
第11回	7/19	離散フーリエ変換の実際（帯域制限，窓関数，高速フーリエ変換，応用例）
第12回	7/21	0～∞上の関数とラプラス変換，ラプラス変換の性質
第13回	7/26	ラプラス逆変換，部分分数展開
第14回	7/28	線形回路の過渡応答，システムの安定性,電気電子システムへの応用
第15回	8/2	z変換と演習問題(テスト)

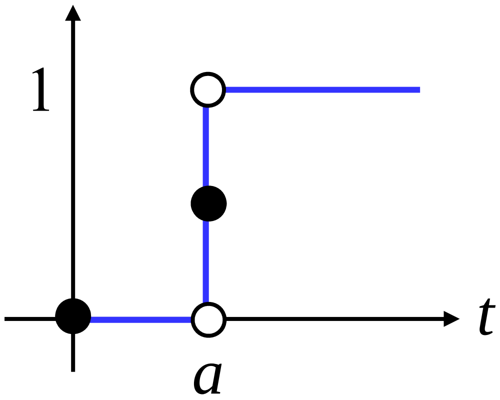
デルタ関数$\delta(t)$のラプラス変換

最初に下記の関数$U(t)$を考える

ヘヴィサイドの単位関数

$$U(t-a)=\begin{cases}0 & (0\le t<a)\\ 1/2 & (t=a)\\ 1 & (a<t)\end{cases}$$

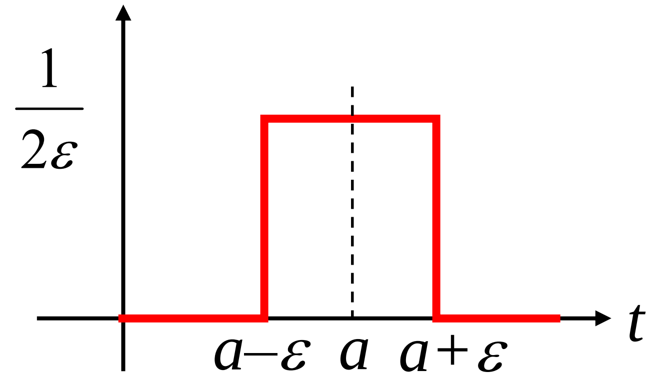
$(t>a)$



$$\mathcal{L}\{U(t-a)\}=\int_0^\infty U(t-a)e^{-st}dt=\int_a^\infty e^{-st}dt$$

$$=\int_0^\infty e^{-s(\tau+a)}d\tau=e^{-as}\int_0^\infty e^{-s\tau}d\tau=\frac{e^{-as}}{s}$$

次に、下記の関数 $d_\varepsilon(t–a)$ を考える



$$d_\varepsilon(t-a)=\frac{1}{2\varepsilon}\left[U\{t-(a-\varepsilon)\}-U\{t-(a+\varepsilon)\}\right]$$

$$\mathcal{L}\{d_\varepsilon(t-a)\}=\frac{1}{2\varepsilon}\left(\frac{e^{-(a-\varepsilon)s}-e^{-(a+\varepsilon)s}}{s}\right)$$

$$=\frac{e^{-as}}{2\varepsilon s}\left(e^{\varepsilon s}-e^{-\varepsilon s}\right)=e^{-as}\frac{\sinh(\varepsilon s)}{\varepsilon s}$$

ここで$\varepsilon\to 0$ とすると、$d_\varepsilon(t–a) = \delta(t–a)$

$$\mathcal{L}\{\delta(t-a)\}=\lim_{\varepsilon\to 0}e^{-as}\frac{\cosh(es)}{1}=e^{-as}$$

ロピタルの定理

移動定理を用いると $\mathcal{L}\{\delta(t)\}=1$

ラプラス変換におけるガンマ関数の利用

ガンマ関数の定義

$$\Gamma(x) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{x-1} dt$$

基本的性質

$$\Gamma(1) = 1, \quad \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$$

(ガウス積分に対応)

$$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$$

$$\Gamma(n+1) = n! \quad (n\text{: 自然数})$$

故障発生(信頼性評価)によく用いる

$\boxed{f(t) = t^x \text{ の関数をラプラス変換する}}$

$$F(s) = \int_0^{\infty} t^x e^{-st} dt$$

$$= \frac{1}{s^x} \int_0^{\infty} (st)^x e^{-st} dt$$

($st = \tau$の置換を行う)

$$= \frac{1}{s^x} \int_0^{\infty} \tau^x e^{-\tau} \frac{1}{s} d\tau$$

$$= \frac{1}{s^{x+1}} \int_0^{\infty} \tau^x e^{-\tau} d\tau$$

$$= \frac{1}{s^{x+1}} \Gamma(x+1)$$

誤差関数のラプラス変換

定義 $$erf(t)=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^t e^{-u^2}du$$ ※正規分布積分した累積密度関数

$$erf\left(\sqrt{t}\right)=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\sqrt{t}} e^{-u^2}du$$

をラプラス変換する

まず、u^2のマクローリン展開

$$erf\left(\sqrt{t}\right)=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\sqrt{t}}\left(1-\frac{u^2}{1!}+\frac{u^4}{2!}-\frac{u^6}{3!}+\cdots\right)du$$

$$=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\left(t^{\frac{1}{2}}-\frac{t^{\frac{3}{2}}}{3}+\frac{t^{\frac{5}{2}}}{5\cdot 2!}-\frac{t^{\frac{7}{2}}}{7\cdot 3!}\cdots\right)$$

$$\mathcal{L}\left\{erf\left(\sqrt{t}\right)\right\}=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\left\{\frac{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)}{s^{\frac{3}{2}}}-\frac{1}{3}\frac{\Gamma\left(\frac{5}{2}\right)}{s^{\frac{5}{2}}}+\frac{1}{5\cdot 2!}\frac{\Gamma\left(\frac{7}{2}\right)}{s^{\frac{7}{2}}}-\frac{1}{7\cdot 3!}\frac{\Gamma\left(\frac{9}{2}\right)}{s^{\frac{9}{2}}}+\cdots\right\}$$

$$\boxed{\Gamma\left(\frac{9}{2}\right)=\frac{7}{2}\cdot\frac{5}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}$$

を利用すると

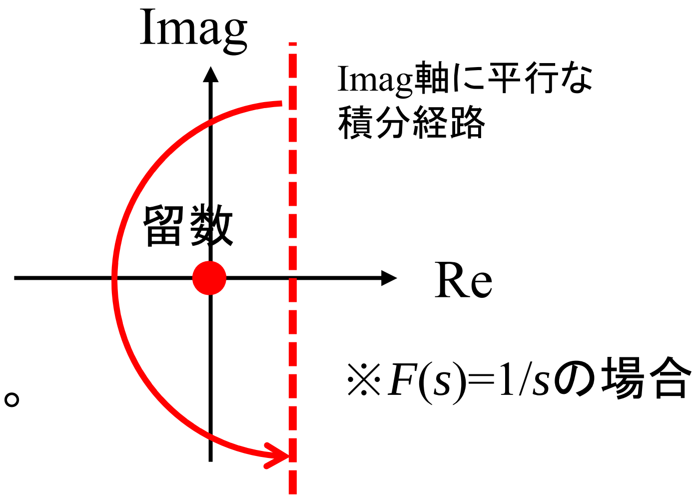
$$\boxed{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\sqrt{\pi}}$$

$$=\frac{1}{s^{\frac{3}{2}}}\frac{2}{\sqrt{\pi}}\left(\frac{1}{2}\sqrt{\pi}-\frac{1}{3}\frac{\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\sqrt{\pi}}{s}+\frac{1}{5\cdot 2!}\frac{\frac{5}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\sqrt{\pi}}{s^2}-\frac{1}{7\cdot 3!}\frac{\frac{7}{2}\cdot\frac{5}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\sqrt{\pi}}{s^3}+\cdots\right)$$

$$=\frac{1}{s^{\frac{3}{2}}}\left(1-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{s}+\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\cdot\frac{1}{s^2}-\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\cdot\frac{1}{s^3}+\cdots\right)=\frac{1}{s^{\frac{3}{2}}}\left(1+\frac{1}{s}\right)^{-\frac{1}{2}}=\frac{1}{s\sqrt{s+1}}$$

$$\boxed{(1+x)^{-\frac{1}{2}}=1-\frac{1}{2}x+\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}x^2-\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}x^3+\cdots}$$

ラプラス逆変換の定義



$\boxed{\text{定義}}$ $$f(t)=\lim_{p\to\infty}\frac{1}{2\pi i}\int_{c-ip}^{c+ip}F(s)e^{st}ds$$

$f(t)$は$F(s)e^{st}$ の全ての特異点の留数の和となる。

$F(s)=\dfrac{1}{s}$ の場合

$$f(t)=\frac{1}{2\pi i}\int_C\frac{1}{s}e^{st}ds=\frac{1}{2\pi i}\left\{2\pi i\left(\operatorname*{Res}_{s=0}\left(\frac{1}{s}e^{st}\right)\right)\right\}=\lim_{s\to 0}s\cdot\frac{1}{s}e^{st}=1$$

$F(s)=\dfrac{1}{s^2+1}$ の場合

$$f(t)=\frac{1}{2\pi i}\int_C\frac{1}{s^2+1}e^{st}ds=\frac{1}{2i}\left(\frac{1}{2\pi i}\int_C\frac{1}{s-i}e^{st}ds-\frac{1}{2\pi i}\int_C\frac{1}{s+i}e^{st}ds\right)$$

$$=\frac{1}{2i}\left\{\lim_{s\to i}(s-i)\cdot\frac{1}{s-i}e^{st}-\lim_{s\to -i}(s+i)\cdot\frac{1}{s+i}e^{st}\right\}$$

$$=\frac{1}{2i}\left(e^{it}-e^{-it}\right)=\sin t$$

特性方程式を利用した常微分方程式の解法

変数tの区間$[0, +\infty)$で定義された関数$x(t)$ の微分方程式を考える。

$$ax''(t)+bx'(t)+cx(t)=f(t),\quad x(0)=c_0,\, x'(0)=c_1 \quad (a, b, c \text{ は定数}, a\neq 0)$$

補助方程式: 右辺を0とした方程式

$$ax''(t)+bx'(t)+cx(t)=0$$

元の式をラプラス変換して像方程式を求める

$$a\{s^2X-sx(0)-x'(0)\}+$$
$$b\{sX-x(0)\}+cX=F(s)$$

$$\therefore (as^2+bs+c)X=ac_0s+ac_1+bc_0+F(s)$$

$$\begin{cases} H(s)=as^2+bs+c \\ H_0(s)=ac_0s+ac_1+bc_0 \end{cases}$$

$\leftarrow$ $\boxed{\text{特性関数という}}$

$$X=\frac{H_0(s)}{H(s)}+\frac{F(s)}{H(s)}$$

$$x(t)=\underbrace{\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{H_0(s)}{H(s)}\right)}_{\text{補助方程式の一般解}}+\underbrace{\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{F(s)}{H(s)}\right)}_{\text{特殊解}}$$

補助方程式の一般解　　特殊解

特性関数の特性方程式

$$H(s)=as^2+bs+c=0$$

異なる2つの実数解λ, μをもつとき

$$H(s)=a(s-\lambda)(s-\mu)$$

よって一般解は

$$\frac{H_0(s)}{H(s)}=\frac{1}{a(\lambda-\mu)}\left\{\left(\frac{\lambda ac_0+ac_1+bc_0}{s-\lambda}-\frac{\mu ac_0+ac_1+bc_0}{s-\mu}\right)\right\}$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{H_0(s)}{H(s)}\right)=\frac{1}{a(\lambda-\mu)}\left\{(\lambda ac_0+ac_1+bc_0)e^{\lambda t}-(\mu ac_0+ac_1+bc_0)e^{\mu t}\right\}$$

一般解

$H_0(s)=1$, つまり$c_0=0$, $ac_1=1$とすると

$$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{H(s)}\right)=\frac{1}{a(\lambda-\mu)}\left(e^{\lambda t}-e^{\mu t}\right)$$

合成法則をもちいると特殊解は以下のようになる

$$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{F(s)}{H(s)}\right)=\frac{1}{a(\lambda-\mu)}\left(e^{\lambda t}-e^{\mu t}\right)*f(t)$$
$$=\frac{1}{a(\lambda-\mu)}\int_0^t\left(e^{\lambda\tau}-e^{\mu\tau}\right)f(t-\tau)d\tau$$

特殊解

質点の運動

直線上を運動する質点が原点からの距離xに比例する引力(バネ)と速度に比例する抵抗、および外力を受ける場合の運動方程式は以下のように記述できる。

$$m\frac{d^2x}{dt^2}+R\frac{dx}{dt}+kx=f(t)$$

質点の質量: m
抵抗の比例定数: R (R>0)
引力の比例定数: k

両辺をmで割り、$b=R/2m$, $c^2=k/m$ (c>0)とおく。

$$\frac{d^2x}{dt^2}+2b\frac{dx}{dt}+c^2x=\frac{1}{m}f(t)$$

$x(0)=c_0$, $x'(0)=c_1$

ラプラス変換を行い、特性方程式を求める。

$$H(s)=s^2+2bs+c^2=0$$

(1) $b>c$の場合、解は $-b\pm\sqrt{b^2-c^2}$

それぞれ$-\alpha$, $-\beta$ (α, β>0)とおくと

$$x=\frac{1}{\alpha-\beta}\left\{(\alpha c_0-c_1-2bc_0)e^{-\alpha t}-(\beta c_0-c_1-2bc_0)e^{-\beta t}-\left(e^{-\alpha}-e^{-\beta}\right)*f(t)\right\}$$

または、

$$x=Ae^{-\alpha t}+Be^{-\beta t}-\frac{1}{\alpha-\beta}\left(e^{-\alpha}-e^{-\beta}\right)*f(t)$$

(2) $b=c$の場合、解は $-b$

$$x=\{c_0-(bc_0-c_1-2bc_0)t\}e^{-bt}+\left(te^{-bt}\right)*f(t)$$

または、

$$x=(A+Bt)e^{-bt}+\left(te^{-bt}\right)*f(t)$$

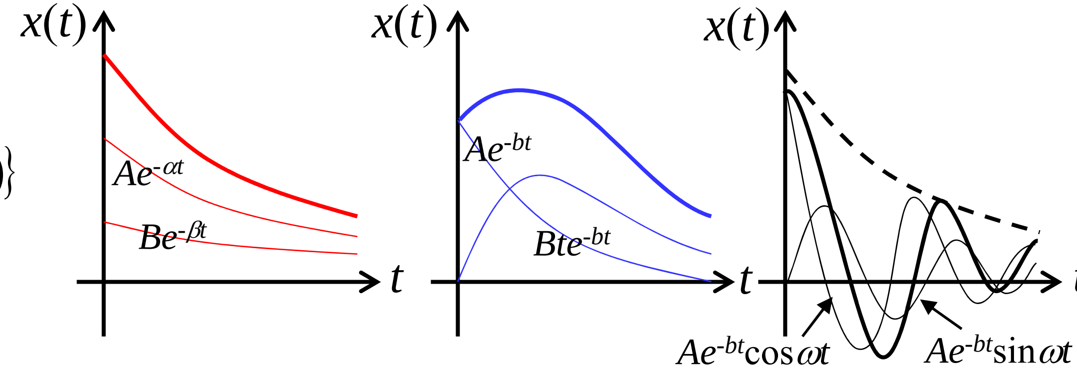
(3) $b<c$の場合、$\omega=\sqrt{c^2-b^2}$ とおくと $-b\pm i\omega$

$$x=e^{-bt}\left\{c_0\cos\omega t-\frac{1}{\omega}(bc_0-c_1-2bc_0)\sin\omega t\right\}+\frac{1}{\omega}\left(e^{-bt}\sin\omega t\right)*f(t)$$

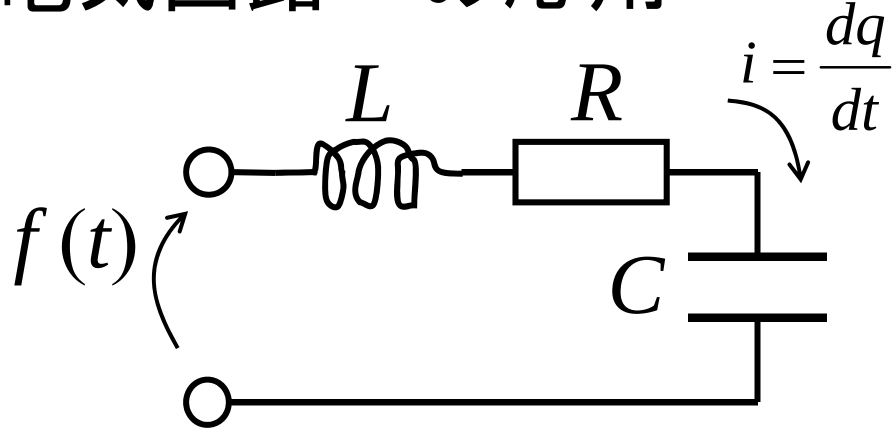
または、

$$x=e^{-bt}(A\cos\omega t+B\sin\omega t)+\frac{1}{\omega}\left(e^{-bt}\sin\omega t\right)*f(t)$$

$f(t)$=0の場合



電気回路への応用



$$L\frac{di}{dt} + Ri + \frac{q}{C} = f(t)$$

qについての微分方程式

$$L\frac{d^2q}{dt^2} + R\frac{dq}{dt} + \frac{1}{C}q = f(t)$$

※質点の振動と同じ形

$q(0)=q_0$, $q'(0)=i(0)=i_0$ とすると　$I=sQ-q_0$

よって

$$L(sI-i_0) + RI + \frac{1}{Cs}(I+q_0) = F$$

$$\therefore \left(Ls + R + \frac{1}{Cs}\right)I = Li_0 - \frac{q_0}{Cs} + F$$

$$\begin{cases} W = \left(Ls + R + \dfrac{1}{Cs}\right)^{-1} & \boxed{\text{伝達関数}} \\ I_0 = Li_0 - \dfrac{q_0}{Cs} & \end{cases}$$

とおくと　$I=WI_0+WF$

$f(t) = \delta(t)$ で$I_0=0$のとき、$I=W$

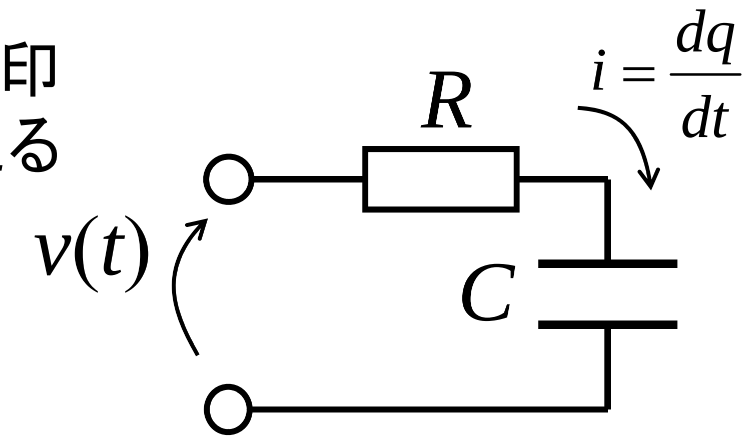
$\mathcal{L}^{-1}(W)=w(t)$　$\boxed{\text{インパルス応答}}$

関数$w(t)$がわかれば、$i(t)$は

$$i(t) = w * f(t) = \int_0^t w(\tau)f(t-\tau)d\tau$$

ラプラス変換を利用した過渡応答の解析

右図の回路に $v(t)$ としてステップ入力を印加した場合の電流$i(t)$の過渡応答を考える



$$v = iR + \frac{1}{C}\int i\,dt$$

ステップ入力のラプラス変換は$1/s$なので像関数は次式になる。

$$\frac{V}{s} = IR + \frac{1}{sC}\left(I + \frac{di(0)}{dt}\right) = IR + \frac{1}{sC}\left\{I + q(0)\right\}$$

$$I = \left\{\frac{V}{R} - \frac{q(0)}{RC}\right\}\cdot\frac{1}{s + 1/CR}$$

$$i(t) = \left\{\frac{V}{R} - \frac{q(0)}{RC}\right\}\cdot\exp\left(-\frac{1}{CR}t\right)$$

$t \to \infty$ の極限を求めると

$\exp(-t)$より $i(\infty)=0$

最終値定理を用いても同じ答え

$$\lim_{t\to\infty} i(t) = \lim_{s\to 0} sI(s) = \lim_{s\to 0} s\cdot\frac{1}{s+1/CR}$$

$$= \lim_{s\to 0} sCR = 0$$

次のページで説明

初期値定理、最終値定理の証明

微分法則 $$\int_0^\infty \frac{df(t)}{dt} e^{-st} dt = sF(s) - f(0)$$

初期値定理

$$f(0) = sF(s) - \int_0^\infty \frac{df(t)}{dt} e^{-st} dt$$

s→∞ の極限をとると

$$f(0) = \lim_{s \to \infty} sF(s) - \lim_{s \to \infty} \int_0^\infty \frac{df(t)}{dt} e^{-st} dt$$

$$\lim_{s \to \infty} \int_0^\infty \frac{df(t)}{dt} e^{-st} dt = 0$$ なので

$$f(0) = \lim_{s \to \infty} sF(s)$$

最終値定理

s→0 の極限をとると

$$\lim_{s \to 0} \int_0^\infty \frac{df(t)}{dt} e^{-st} dt = \lim_{s \to 0} sF(s) - f(0)$$

$$\int_0^\infty \frac{df(t)}{dt} dt = \lim_{s \to 0} sF(s) - f(0)$$

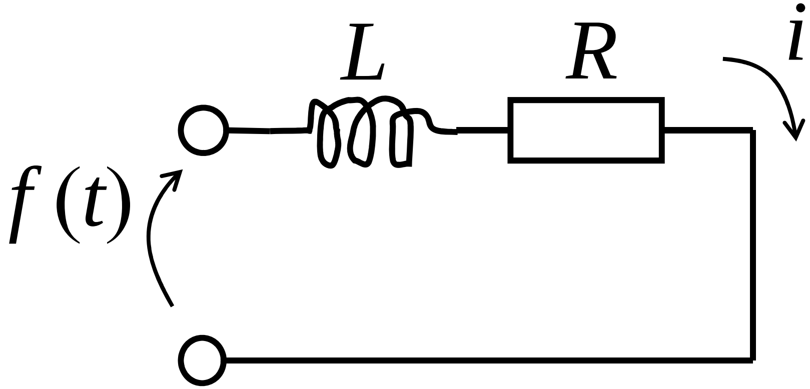
$$\int_{f(0)}^{f(\infty)} df(t) = \lim_{s \to 0} sF(s) - f(0)$$

$$f(\infty) - f(0) = \lim_{s \to 0} sF(s) - f(0)$$

$$\therefore\ f(\infty) = \lim_{s \to 0} sF(s)$$

本日の演習問題 1

右図の電気回路を考える。
流れる電流 $i\,(t)$ を求めよ。
但し、$i\,(0)=0$ とする。



(1) $f\,(t) = \delta\,(t)$ の場合

$$L\frac{di}{dt} + Ri = f(t)$$

伝達関数Wは $$W = \frac{1}{Ls+R}$$

$$\therefore i(t) = w(t) = \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{Ls+R}\right)$$

$$= \frac{1}{L}\exp\left(-\frac{R}{L}t\right)$$

(2) $f\,(t) = E_0 \sin \omega t$ の場合

$$F(s) = E_0 \frac{\omega}{s^2+\omega^2}$$

$$i(t) = \mathcal{L}^{-1}(WF) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{E_0\omega}{(Ls+R)(s^2+\omega^2)}\right\}$$

$$= \frac{E_0\omega}{R^2+L^2\omega^2}\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{L^2}{Ls+R} - \frac{Ls-R}{s^2+\omega^2}\right)$$

$$= \frac{E_0\omega}{R^2+L^2\omega^2}\left\{L\omega\exp\left(-\frac{R}{L}t\right) - L\omega\cos\omega t + R\sin\omega t\right\}$$

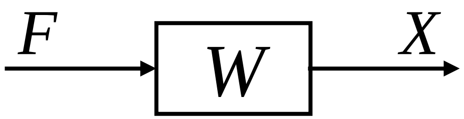
線形システムとブロック線図

あるシステムの入力 $f(t)$ と出力 $x(t)$ の間の伝達関数を$T(f(t))=x(t)$ と表すとき

$$T(\lambda f(t)) = \lambda x(t)$$
$$T(f_1(t) + f_2(t)) = x_1(t) + x_2(t)$$

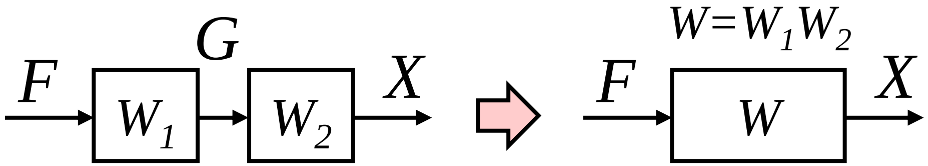
の2条件がなりたつならば、線形システムである

伝達関数とブロック線図



インパルス入力$\delta(t)$、は$F(s)=1$のため
$X=W$となる。Wを伝達関数と呼ぶ。

ブロック線図の等価交換

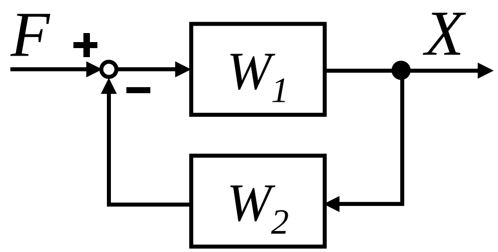


証明

$G=W_1F,\quad X=W_2G$

$\therefore\ X=W_2W_1F \quad \therefore\ X=WF$

■ フィードバック・システムの伝達関数W

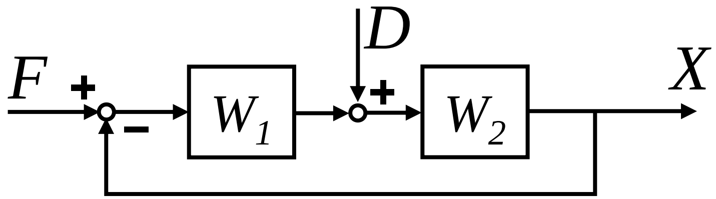


$X=W_1(F-W_2X)$

$$X = \frac{W_1}{1+W_1W_2}F$$

$$\therefore\ W = \frac{W_1}{1+W_1W_2}$$

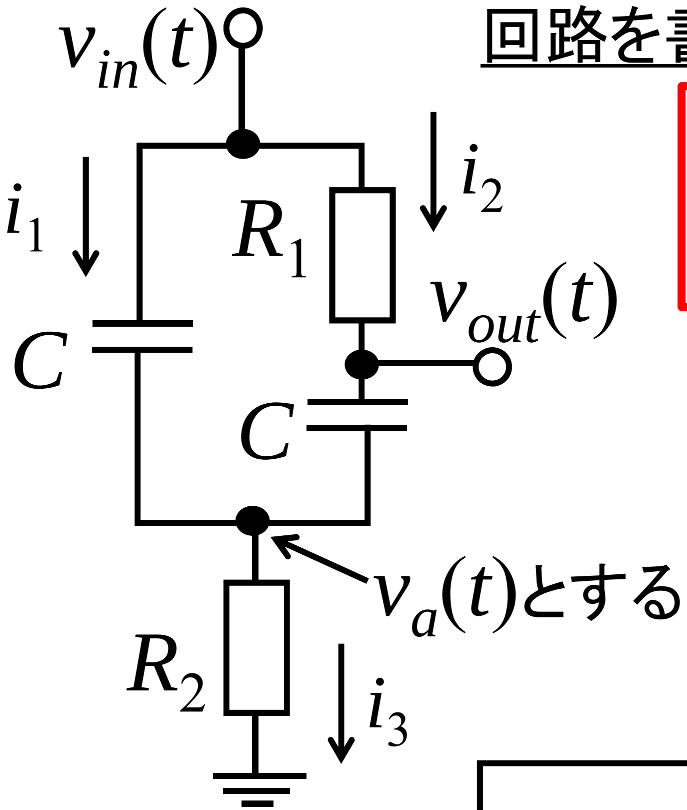
■ 外乱$d(t)$を含んだシステム ($D=\mathcal{L}(d(t))$)



$X=W_2\{W_1(F-X)+\mathrm{D}\}$

$$\therefore X = \frac{W_1W_2}{1+W_1W_2}F + \frac{W_2}{1+W_1W_2}D$$

本日の演習問題２



回路を書き直す

※大文字はラプラス変換

$$I_2 = \frac{1}{R_1}\left(V_{in} - V_{out}\right), \quad V_{out} = \frac{1}{sC} I_2 + V_a$$

$$\frac{V_a}{R_2} = I_3, \quad I_1 = I_3 - I_2, \quad V_{in} - V_a = \frac{1}{sC} I_1$$