

フーリエ変換とラプラス変換

第9回講義資料

担当: 角嶋邦之

kakushima.k.aa@m.titech.ac.jp

工学院電気電子系

講義予定(全15回)

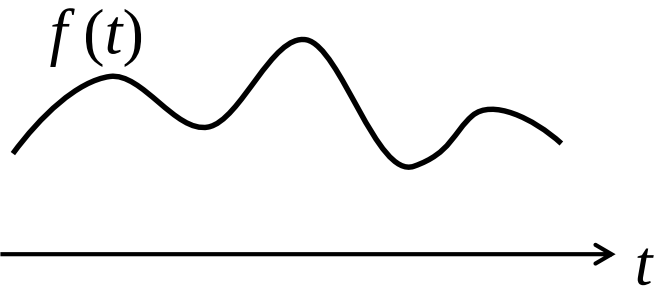
第1回	6/14	線形システムとは, 周期関数の級数展開
第2回	6/16	フーリエ級数の性質
第3回	6/21	線形回路の周期波に対する定常応答
第4回	6/23	フーリエ級数の理解度確認総合演習と解説
第5回	6/28	非周期関数とフーリエ積分・フーリエ変換
第6回	6/30	フーリエ変換の存在と性質
第7回	7/5	時間領域表示と周波数領域表示, 線形回路の時間応答と周波数応答
第8回	7/7	理解度の確認と解説

第9回	7/12	シャノンの標本化定理
第10回	7/14	離散フーリエ変換の基礎(定義, 性質)
第11回	7/19	離散フーリエ変換の実際(帯域制限, 窓関数, 高速フーリエ変換, 応用例)
第12回	7/21	$0 \sim \infty$ 上の関数とラプラス変換, ラプラス変換の性質
第13回	7/26	ラプラス逆変換, 部分分数展開
第14回	7/28	線形回路の過渡応答, システムの安定性, 電気電子システムへの応用
第15回	8/2	z変換と演習問題(テスト)

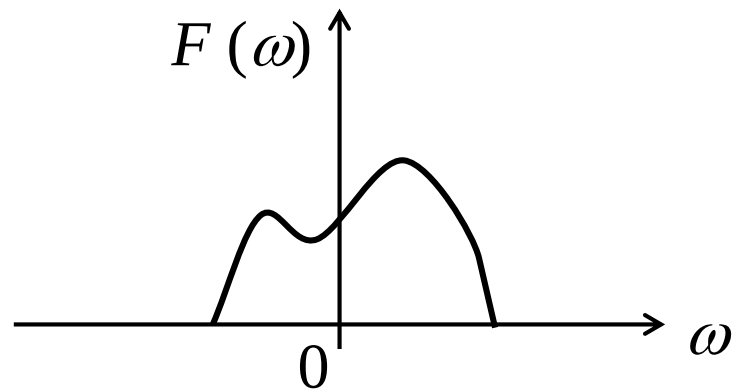
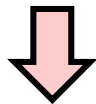
フーリエ変換の利用

数学的技法の工学的応用

信号の時間変化



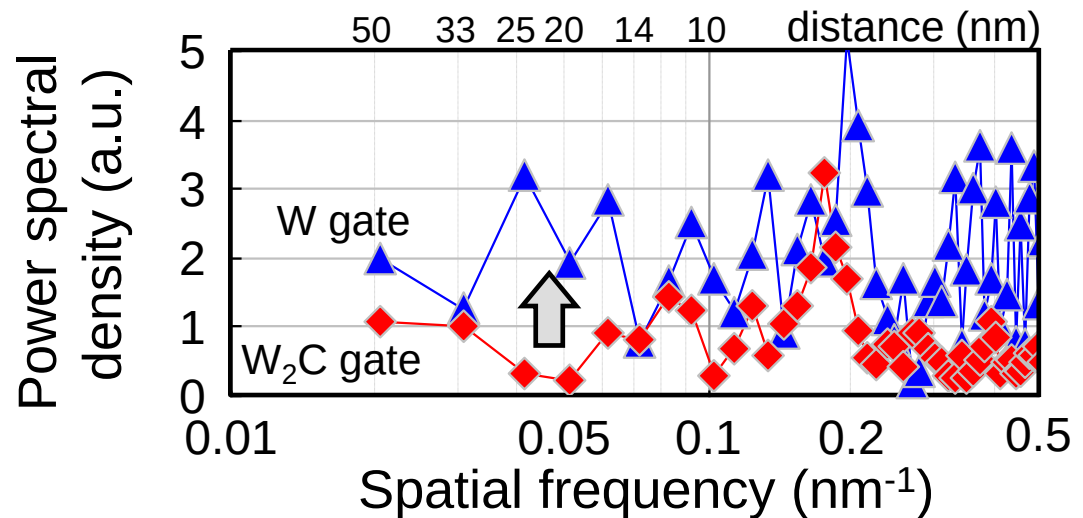
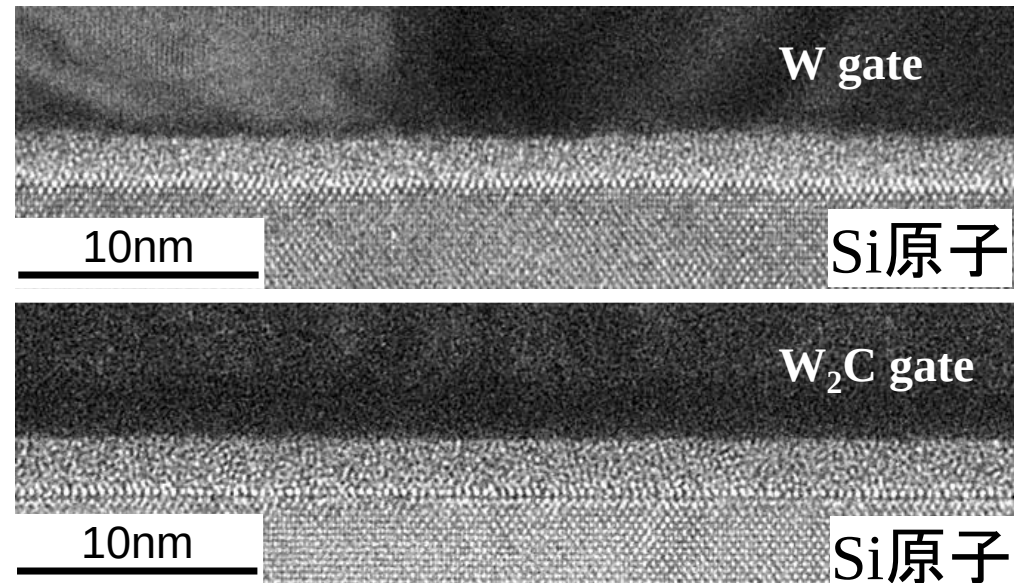
$f(t)$ に含まれる周波数成分を抽出



- 音楽データの解析
- 楽器用チューナ
- 情報通信

画像の解析

(絶縁膜/Si基板の粗さ)



フーリエ変換の基礎 I (復習)

■フーリエ変換と逆フーリエ変換

$$F[f(x)] = F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-i\omega x} dx$$

時間の関数を角周波数の関数に変換

$$f(x) = F^{-1}[F(\omega)] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{i\omega x} d\omega$$

角周波数の関数を時間の関数に変換

■デルタ関数 $\delta(x)$

定義

$$\delta(x) = \begin{cases} \infty & (x=0) \\ 0 & (x \neq 0) \end{cases} \quad \left\{ \begin{array}{l} F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x) e^{-i\omega x} dx = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x) e^0 dx = 1 \\ \delta(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega x} d\omega \end{array} \right.$$
$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x) dx = 1$$

■周期的デルタ関数, $\delta_T(x)$, のフーリエ変換(周期 T)

$$F[\delta_T(x)] = \frac{2\pi}{T} \delta_{\frac{2\pi}{T}}(\omega) = \frac{2\pi}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta\left(\omega - \frac{2n\pi}{T}\right)$$

フーリエ変換の基礎 II (復習)

■ 畳み込み積分(合成積)

$$f * g(x) = \frac{1}{T} \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) g(x - \tau) d\tau$$

あるイベントが時間 τ で起こり、現在の様子 $g(x - \tau)$ を全て足し合わせたもの。

$$F[f * g(x)] = F(\omega)G(\omega)$$

$$F[f g(x)] = \frac{1}{2\pi} \{F(\omega) * G(\omega)\}$$

■ 複素フーリエ級数: 周期 T の関数 $f(x)$ の級数展開

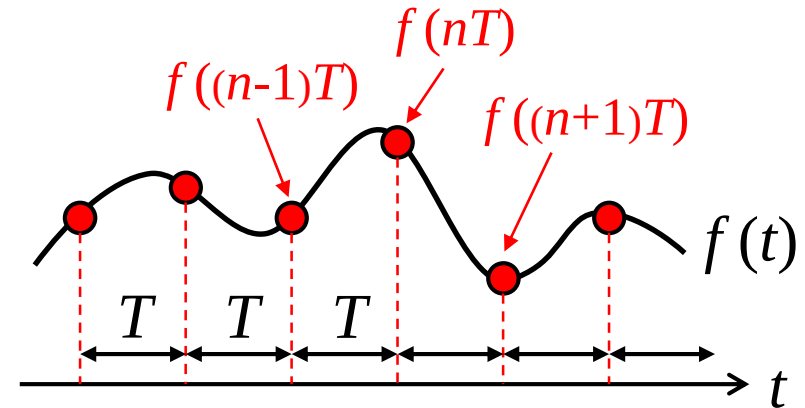
$$f(x) \approx \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{i \frac{2n\pi}{T} x}, \quad c_n = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(x) e^{-i \frac{2n\pi}{T} x} dx$$

Shannonのサンプリング(標本化)定理

帯域制限信号の関数 $f(t)$ 、つまり $F(\omega)=0$ ($|\omega|\geq\omega_1$)、を考える。
サンプリング時間 T が $T \leq \frac{\pi}{\omega_1}$ ならば、サンプリング値 $f(nT)$ によって元の $f(t)$ を完全に決定することができる。

$T \leq \frac{\pi}{\omega_1}$ であるならば、離散信号 $f(nT)$ から $f(t)$ が復元できる

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(nT) \frac{\sin \pi \left(\frac{t}{T} - n \right)}{\pi \left(\frac{t}{T} - n \right)}$$

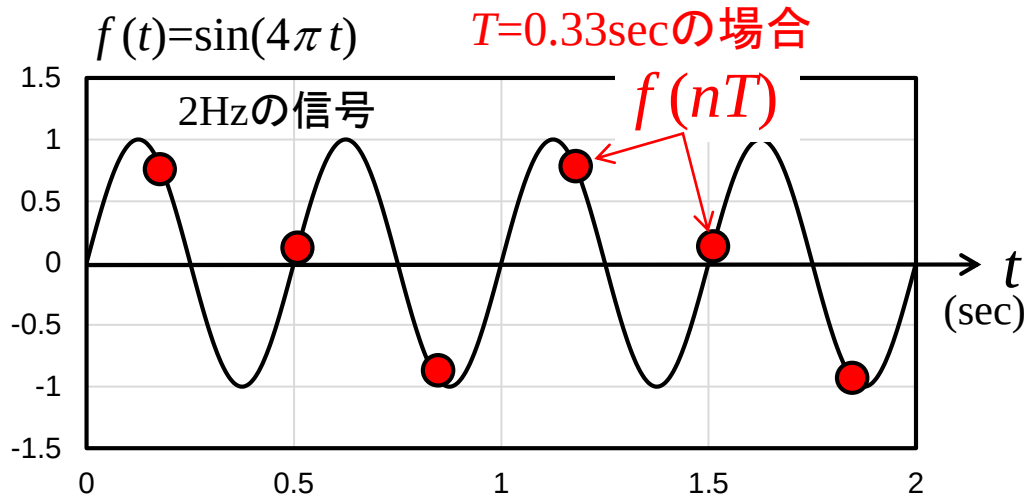


情報通信の例

T を小さくして過剰にサンプリング値を送信する必要がない

$$T < \frac{\pi}{\omega_1} \quad (\text{ナイキストの条件}), \quad \frac{\omega_1}{2\pi} \quad (\text{ナイキスト周波数})$$

サンプリング値から元信号の復元

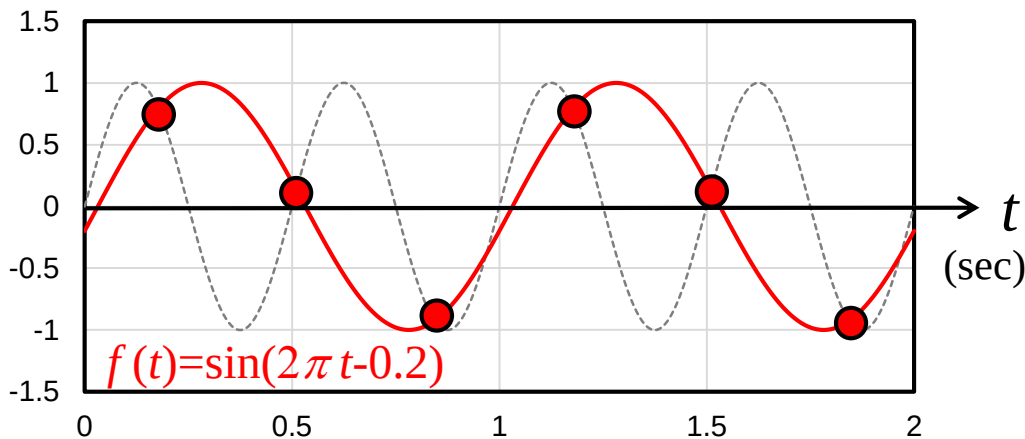


$$T > \frac{\pi}{\omega_1} \text{ の場合}$$

エイリアシング信号が現れ、 $f(t)$ を再現することができない

一周期に最低2点サンプリングデータが必要

↓ サンプリング値から $f(t)$ の再現



1Hzの信号でも合ってしまう

■ 復元に失敗した例

- テレビ映像中で回転しているタイヤ
- 蛍光灯の下での扇風機

■ 積極的に利用した例

- 原子の動きをストロボ撮影

サンプリング定理の証明

■ サンプリング値関数 $f_T(t)$ (帯域幅 ω_1 で帯域制限)

$$\begin{aligned} f_T(t) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(nT)\delta(t-nT) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(t)\delta(t-nT) \\ &= f(t) \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t-nT) = f(t)\delta_T(t) \end{aligned}$$

■ $f_T(t)$ のフーリエ変換、 $F[f_T(t)]$ 、を導出する

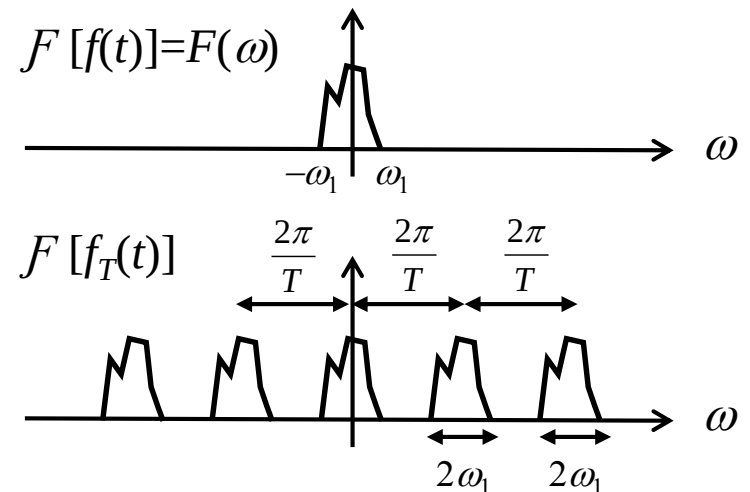
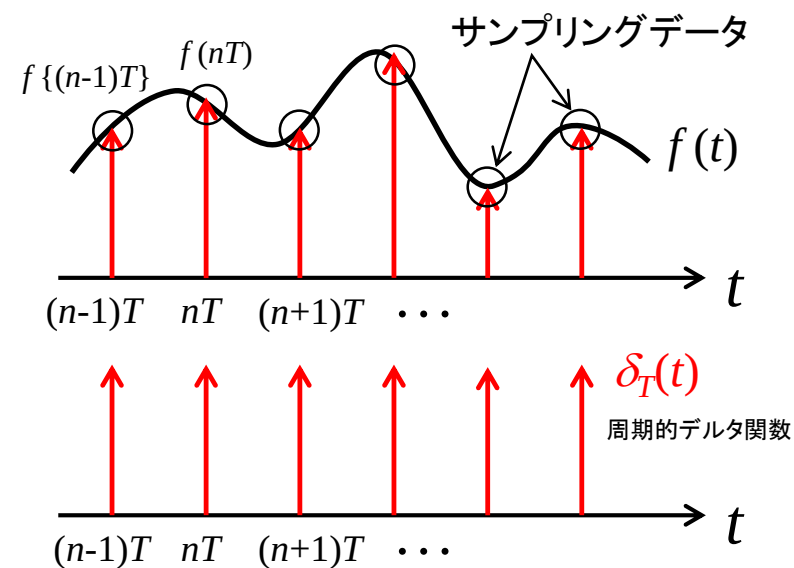
$$F[f_T(t)] = F[f(t)\delta_T(t)] = (1/2\pi) F[f(t)] * F[\delta_T(t)]$$

$$= \frac{1}{2\pi} F(\omega) * \left\{ \frac{2\pi}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta\left(\omega - \frac{2n\pi}{T}\right) \right\}$$

$$= \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} F(\omega) * \delta\left(\omega - \frac{2n\pi}{T}\right)$$

$$= \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega - \xi) \delta\left(\xi - \frac{2n\pi}{T}\right) d\xi$$

$$= \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} F\left(\omega - \frac{2n\pi}{T}\right)$$



$\frac{2\pi}{T}$ が $f(t)$ のフーリエ変換 $F(\omega)$ の周波数幅 $2\omega_1$ よりも小さい場合、 $F[f_T(t)]$ が重なり合ってしまう

$\frac{2\pi}{T} > 2\omega_1$ の時、 $F(\omega)$ が重なることなく周期的に現れる

この1周期分を取り出し、逆フーリエ変換することで $f(t)$ を決定する

$F[f_T(t)]$ のフーリエ級数展開

■ $F[f_T(t)]$ は周期 $2\pi/T$ の周期関数

$$F[f_T(t)] = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} F\left(\omega - \frac{2n\pi}{T}\right) = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{i\frac{2n\pi}{(2\pi/T)}\omega} = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inT\omega}$$

フーリエ係数 c_n は

$$\begin{aligned} c_n &= \frac{1}{(2\pi/T)} \int_{-(2\pi/T)/2}^{(2\pi/T)/2} \left\{ \sum_{n=-\infty}^{\infty} F\left(\omega - \frac{2n\pi}{T}\right) \right\} e^{-i\frac{2n\pi}{(2\pi/T)}\omega} d\omega \\ &= \frac{T}{2\pi} \int_{-\pi/T}^{\pi/T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} F\left(\omega - \frac{2n\pi}{T}\right) e^{-inT\omega} d\omega \end{aligned}$$

$-\frac{\pi}{T} \leq \omega \leq \frac{\pi}{T}$ の積分領域では $\sum_{n=-\infty}^{\infty} F\left(\omega - \frac{2n\pi}{T}\right) = F(\omega)$ であるから

$$c_n = \frac{T}{2\pi} \int_{-\pi/T}^{\pi/T} F(\omega) e^{-inT\omega} d\omega = Tf(-nT) \quad \left(\begin{array}{l} f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi/T}^{\pi/T} F(\omega) e^{i\omega t} d\omega \text{ なので} \\ f(-nT) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi/T}^{\pi/T} F(\omega) e^{-inT\omega} d\omega \end{array} \right)$$

よって
$$F[f_T(t)] = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} Tf(-nT) e^{inT\omega} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(nT) e^{-inT\omega}, \quad (-\infty \leq \omega \leq \infty)$$

サンプリングデータから元の信号 $f(t)$ の復元

■ 信号 $f(t)$ のフーリエ変換 $F(\omega)$

$$F(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(nT) e^{-inT\omega}, \quad \left(-\frac{\pi}{T} \leq \omega \leq \frac{\pi}{T} \right)$$

■ $f(t)$ は $F(\omega)$ の逆フーリエ変換 $F^{-1} [F(\omega)]$

$$f(t) = F^{-1} [F(\omega)] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi/T}^{\pi/T} \left\{ \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(nT) e^{-inT\omega} \right\} e^{i\omega t} d\omega \quad (\text{中心の1周期分のみを使う})$$

$$= \frac{1}{2\pi} \left\{ \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(nT) \right\} \int_{-\pi/T}^{\pi/T} e^{-inT\omega} e^{i\omega t} d\omega = \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(nT) \int_{-\pi/T}^{\pi/T} e^{i(t-nT)\omega} d\omega$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(nT) \frac{\sin \pi \left(\frac{t}{T} - n \right)}{\pi \left(\frac{t}{T} - n \right)}$$

※この導出は次のスライド

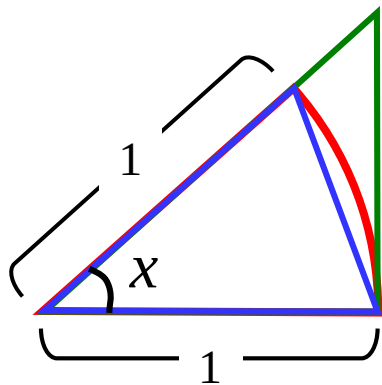
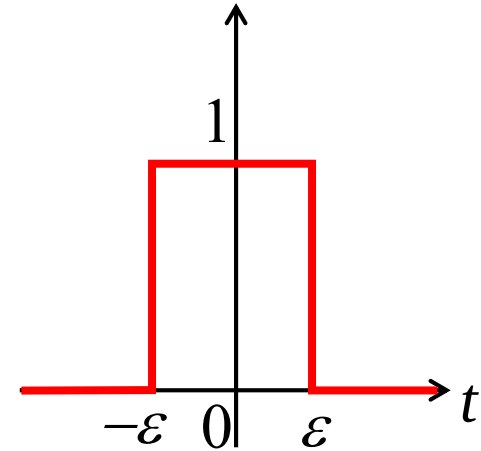
サンプリング値 $f(nT)$ に関数 を乗じて加算すると $f(t)$ が復元可能

sinc関数の導出

$$f(t) = \begin{cases} 1 & (|t| < \varepsilon) \\ 0 & (|t| \geq \varepsilon) \end{cases}$$

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt = \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} e^{-i\omega t} dt$$

$$= \left[\frac{e^{-i\omega t}}{-i\omega} \right]_{-\varepsilon}^{\varepsilon} = \frac{e^{i\omega\varepsilon} - e^{-i\omega\varepsilon}}{i\omega} = 2 \frac{\sin(\omega\varepsilon)}{\omega}$$



※ $x=0$ のときの扱い

$$f(x) = \frac{\sin x}{x}$$

$$\frac{1}{2} \sin x < \frac{1}{2} x < \frac{1}{2} \tan x$$

——— 三角形(小)の面積
 ——— 円弧の面積
 ——— 三角形(大)の面積

$\sin x$ で割って逆数をとる

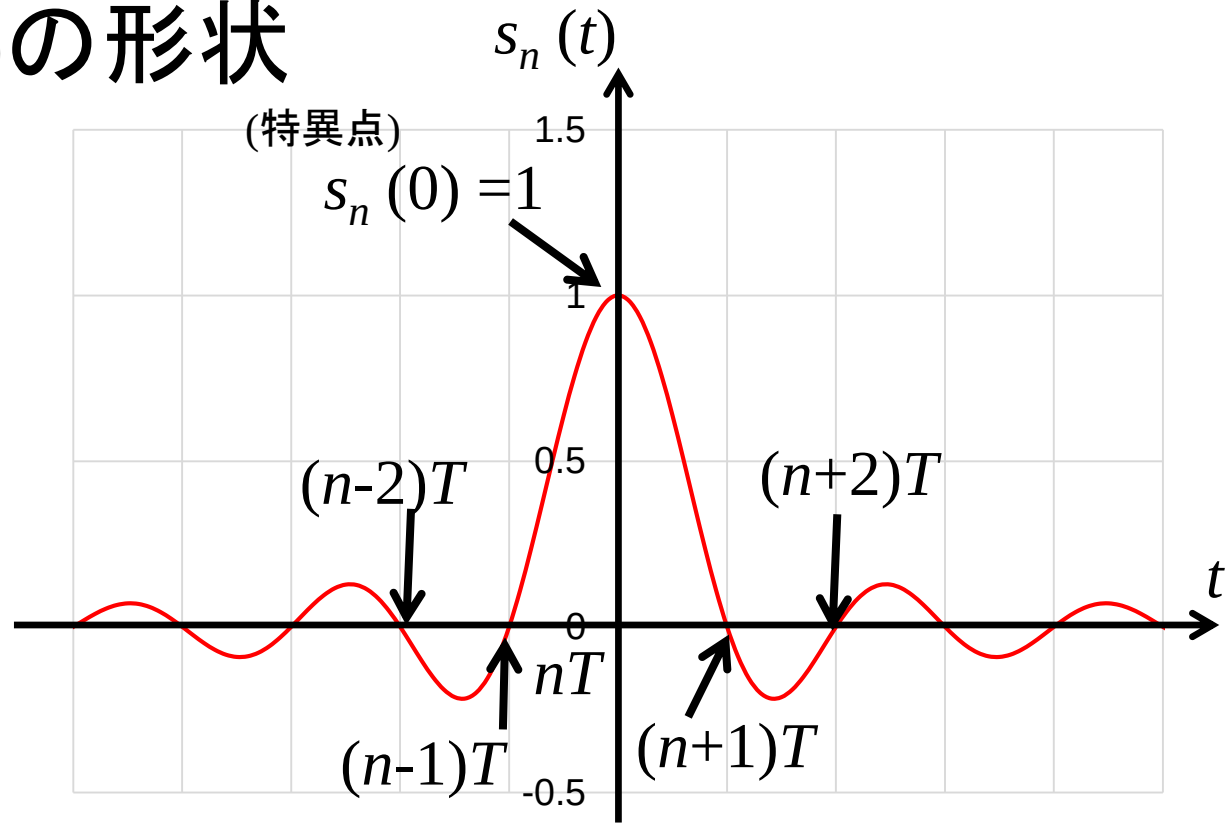
$$\cos x < \frac{\sin x}{x} < 1$$

$x \rightarrow +0$ とすると $\text{sinc}(0)=1$

標準化関数 $s_n(t)$ の形状

$$s_n(t) = \frac{\sin \pi \left(\frac{t}{T} - n \right)}{\pi \left(\frac{t}{T} - n \right)}$$
$$= \text{sinc} \left(\frac{t}{T} - n \right)$$

(注) 正規化されたsinc関数



$s_n(t)$ の特徴

$s_n(0) = 1$ とする

$s_n(t)$ は $s_0(t)$ を nT だけ平行移動した関数である

$t = nT$ ($n = \pm 1, \pm 2, \dots$) で、 $s_0(t) = 0$

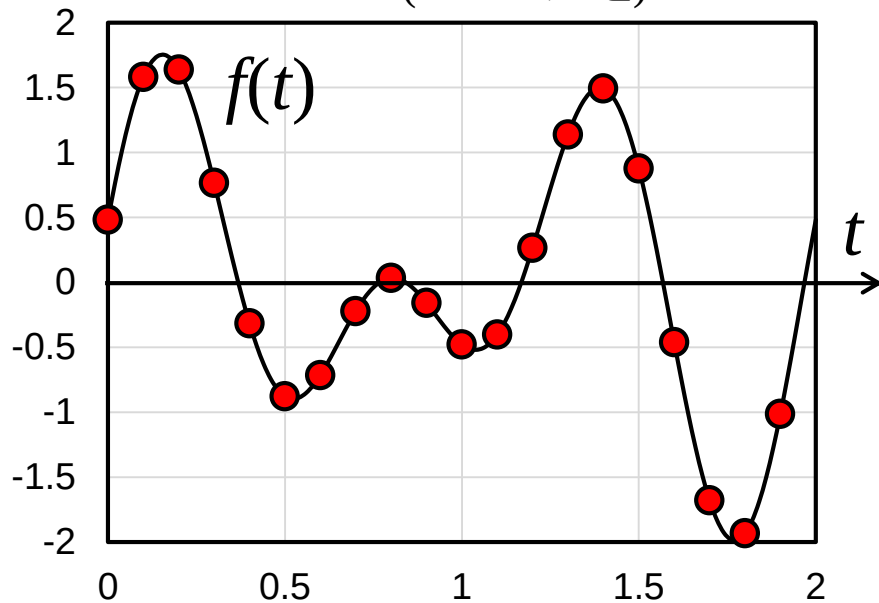
サンプリングと復元の例

$$f(t) = \sin(2\pi f_1 t) + \sin(2\pi f_2 t + 0.5)$$

$f_1 = 1.0\text{Hz}$, $f_2 = 1.5\text{Hz}$ の場合

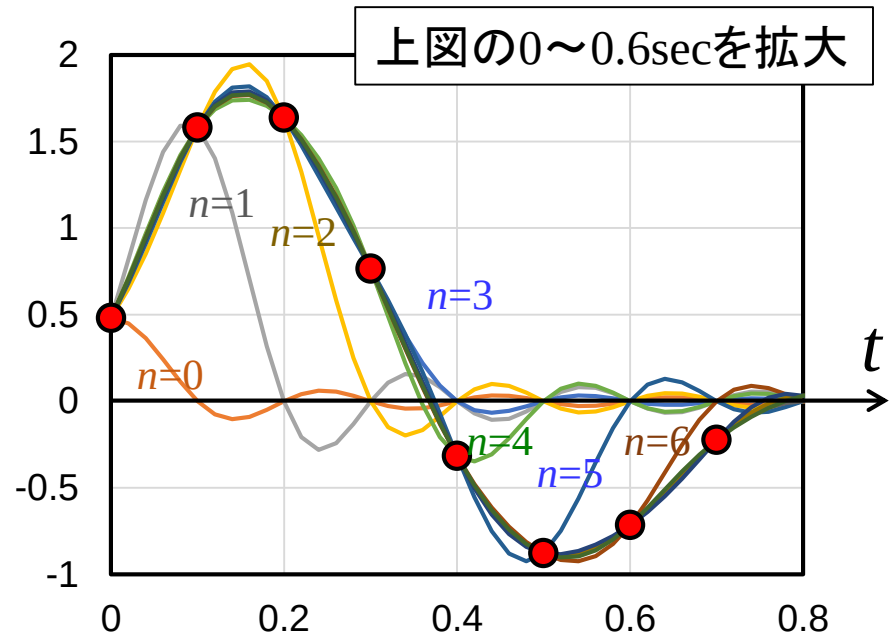
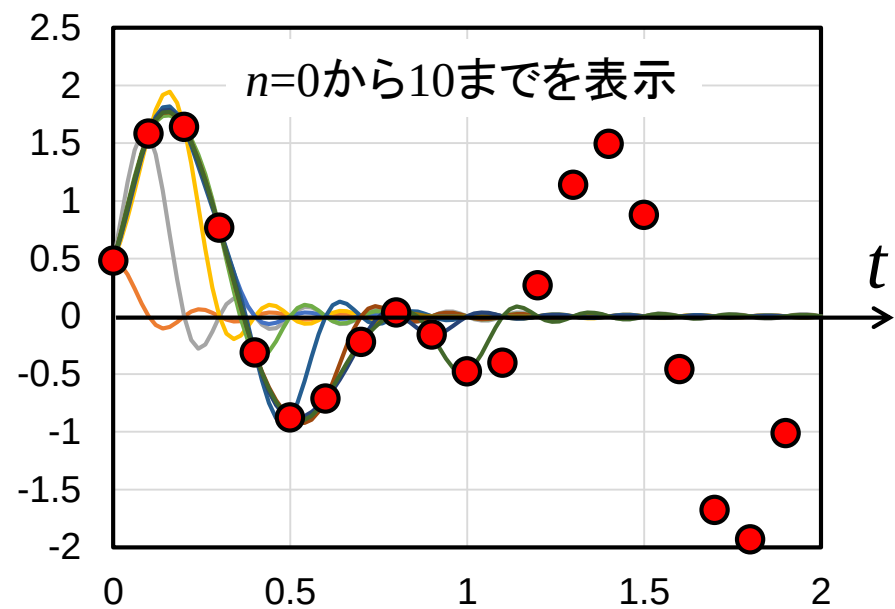
→ ナイquist周波数は 3.0Hz

今回は余裕をみて 10Hz でサンプリング
(0.1sec のこと)



$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(nT) \text{sinc}\left(\frac{t}{T} - n\right)$$

この式でサンプリングデータから復元してみる



n を増やして積算すると復元する様子を確認

変調信号について

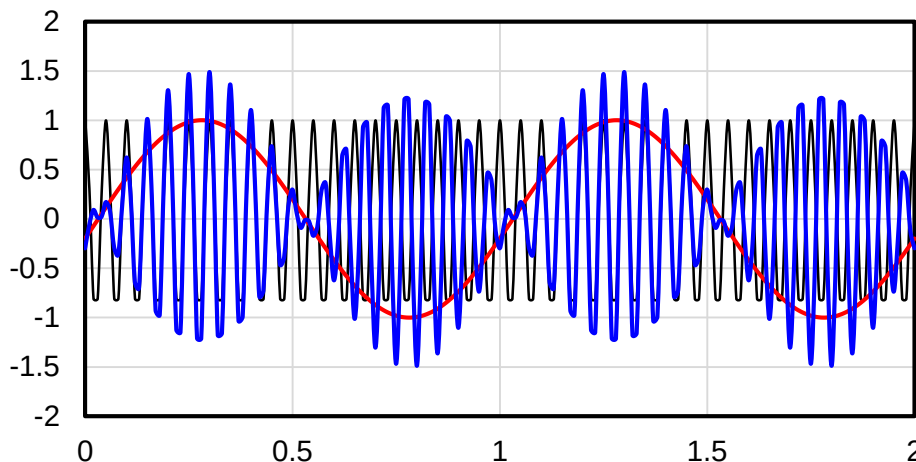
変調とは、信号 $f(t)$ を搬送波 $g(t) = A \cos(\omega_c t)$ に乗せることをいう

■ 振幅変調 (amplitude modulation: AM)

(A: 定数)

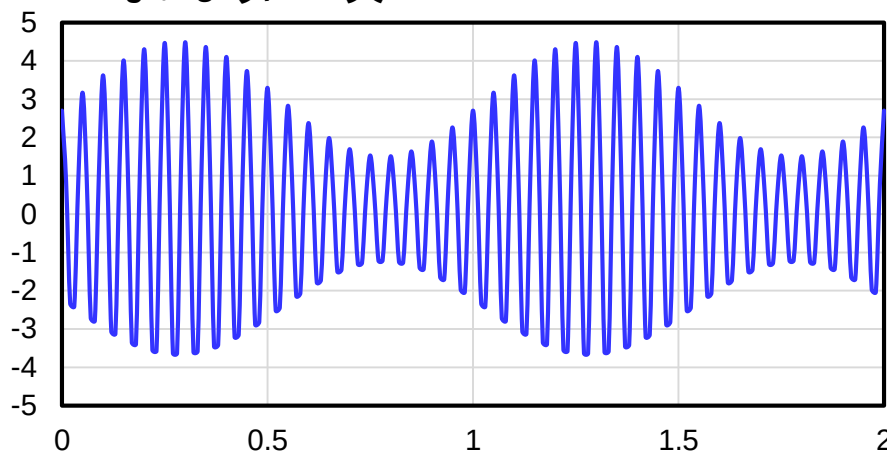
$$g_1(t) = A f(t) \cos(\omega_c t)$$

(信号1Hz, 搬送波 20Hzの例)



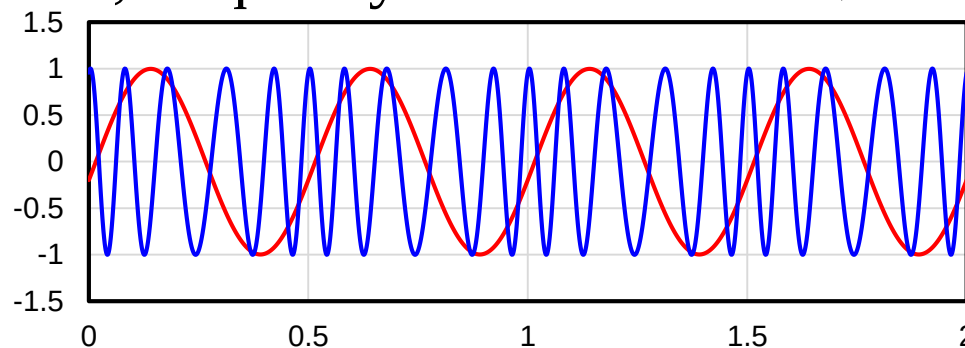
$$g_2(t) = A \{K + f(t)\} \cos(\omega_c t)$$

※ $f(t)$ が0になっても変調 $g_2(t)$ が0にならないように工夫



■ 角度変調 (phase modulation: PM, frequency modulation: FM)

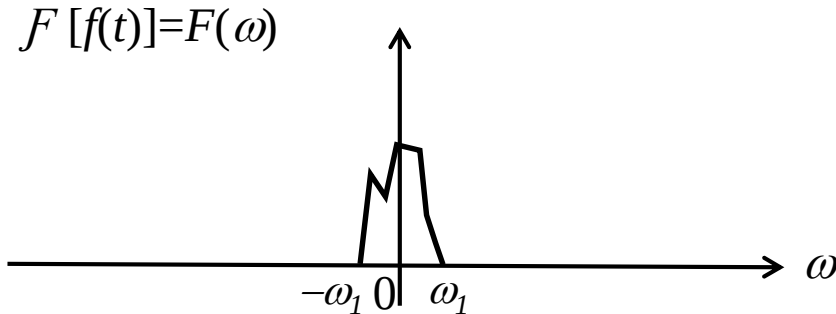
$$g_3(t) = A \cos\{\omega_c t + k_1 f(t)\}$$



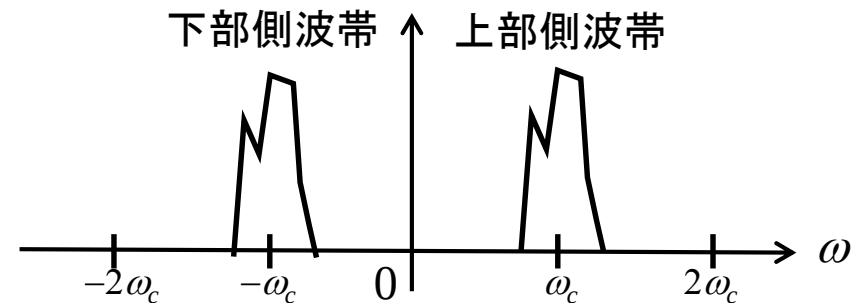
AM信号のフーリエ変換

$$\begin{aligned} F[g_1(t)] &= F[A f(t) \cos(\omega_c t)] = (1/2\pi) F[f(t)] * F[A \cos(\omega_c t)] \\ &= \frac{1}{2\pi} F(\omega) * \{\pi A (\delta(\omega + \omega_c) + \delta(\omega - \omega_c))\} \\ &= \frac{1}{2} A \{F(\omega) * \delta(\omega + \omega_c) + F(\omega) * \delta(\omega - \omega_c)\} \\ &= \frac{1}{2} A \{F(\omega + \omega_c) + F(\omega - \omega_c)\} \end{aligned}$$

変調前の信号のフーリエ変換



変調信号のフーリエ変換 $F[g_1(t)]$



$\omega = \pm \omega_c$ を中心に元の信号の
フーリエ変換 $F(\omega)$ が現れる

AM信号の復調

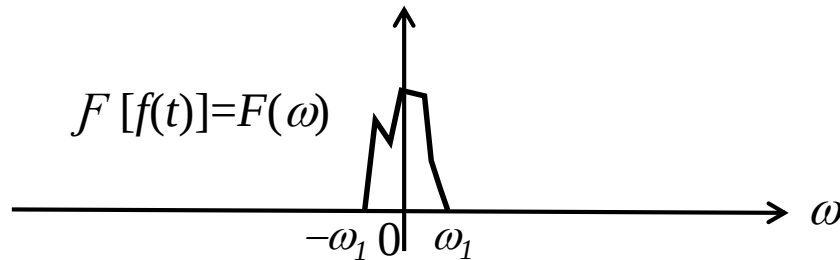
- AM信号に $\cos(\omega_c t)$ を乗ずることで復調が可能

$$g_1(t)\cos(\omega_c t) = A f(t) \cos^2(\omega_c t) = (A/2) f(t) (1 + \cos 2\omega_c t)$$

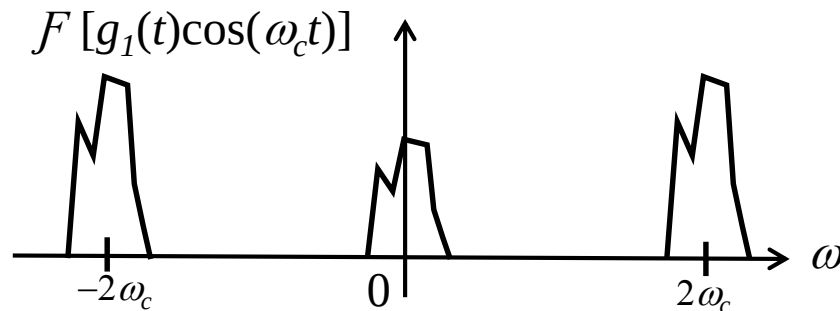
- 復調信号のフーリエ変換

$$\begin{aligned} F[g_1(t)\cos(\omega_c t)] &= (A/2) F[f(t)] + (A/2) F[f(t)\cos(2\omega_c t)] \\ &= (A/2) F(\omega) + (\pi A/2) \{F(\omega + 2\omega_c) + F(\omega - 2\omega_c)\} \end{aligned}$$

変調前の信号のフーリエ変換



cos(ω_c t) を乗じた後の信号のフーリエ変換



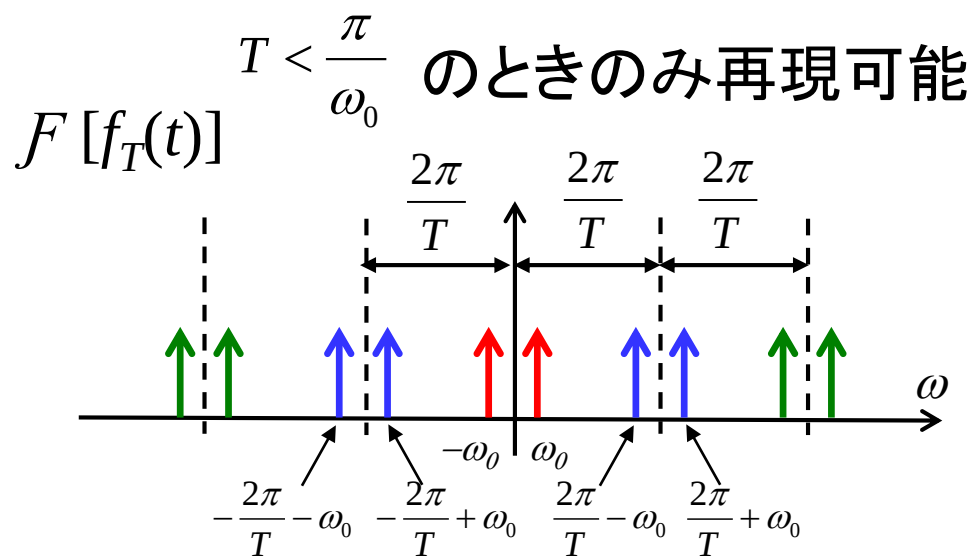
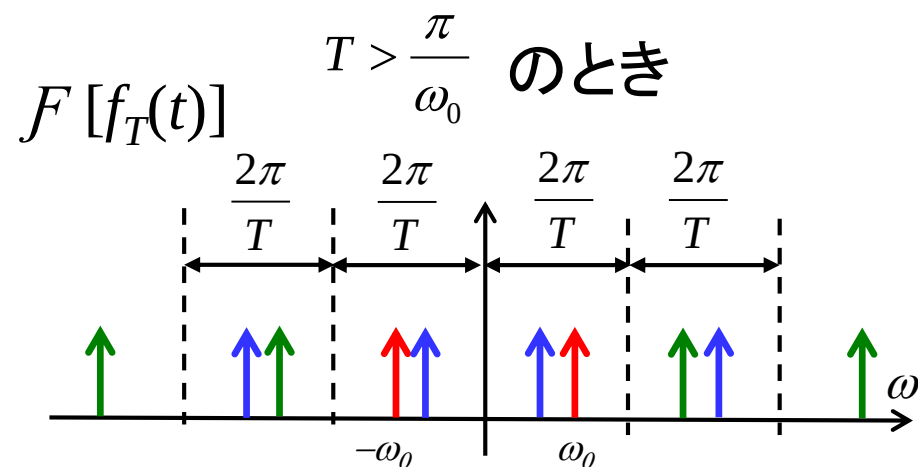
信号の取り出しにはlow pass filter (LPF)を用いて低周波数領域 $|\omega| < \omega_1$ の信号のみを取り出し、逆フーリエ変換して復調する。

本日の演習問題(1)

$f(t) = \cos(\omega_0 t)$ を周期 T でサンプリングした信号 $f_T(t)$ を考える。

$f_T(t)$ のフーリエ変換を図示し、元の $f(t)$ が再現できる T の条件を示せ。

$$\begin{cases} f(t) = \cos(\omega_0 t) = \frac{1}{2}(e^{i\omega_0 t} + e^{-i\omega_0 t}) \\ F(\omega) = \pi[\delta(\omega - \omega_0) + \delta(\omega + \omega_0)] \end{cases} \quad \begin{aligned} F[f_T(t)] &= \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} F\left(\omega - \frac{2n\pi}{T}\right) \\ &= \frac{\pi}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left\{ \delta\left(\omega - \frac{2n\pi}{T} - \omega_0\right) + \delta\left(\omega - \frac{2n\pi}{T} + \omega_0\right) \right\} \end{aligned}$$

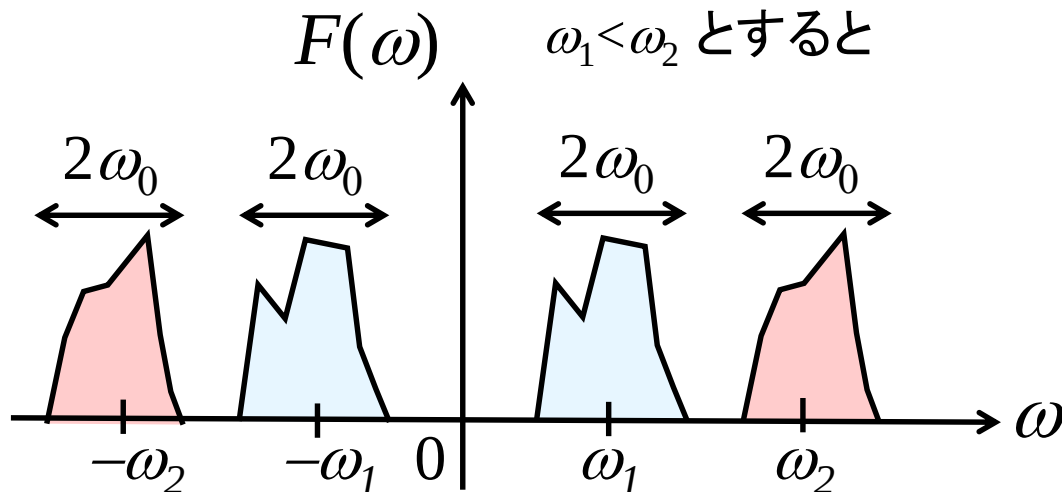


本日の演習問題(2)

帯域が ω_0 に制限された信号 $f_1(t)$ を $\cos(\omega_1 t)$ の搬送波に、同様に帯域が ω_0 に制限された $f_2(t)$ を $\cos(\omega_2 t)$ の搬送波に振幅変調して乗せることを考える。 $f_1(t)$ 、および $f_2(t)$ を損失なく復調できるためには、 ω_1 と ω_2 の間にどのような関係が必要か、フーリエ変換を用いて答えよ。

$$\begin{aligned} F[f_1(t) \cos(\omega_1 t)] \\ = (1/2\pi) F[f_1(t)] * F[\cos(\omega_1 t)] &= \frac{1}{2} \{F_1(\omega + \omega_1) + F_1(\omega - \omega_1)\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} F[f_2(t) \cos(\omega_2 t)] \\ = (1/2\pi) F[f_2(t)] * F[\cos(\omega_2 t)] &= \frac{1}{2} \{F_2(\omega + \omega_2) + F_2(\omega - \omega_2)\} \end{aligned}$$



$|\omega_2 - \omega_1| > 2\omega_0$ でないとスペクトルが重なる

搬送波の周波数差は、帯域の2倍以上である必要