解析学　演習１

答案用紙に学籍番号，氏名，問題番号を明記．裏面使用可．

問題 1. 次の問いに答えよ．

(1)　$\mathrm{Re}\, z \leqq |z|$ を証明せよ．ただし，$\mathrm{Re}\, z$ は複素数 z の実部を表すものとする．

(2)　三角不等式 $|z_1+z_2| \leqq |z_1|+|z_2|$ を，

$|z|^2 = z \cdot \bar{z}$ ，$\mathrm{Re}\, z = \dfrac{z+\bar{z}}{2}$ および(1)で示した関係を利用して導出せよ．

(3)　$\overline{\left(\dfrac{z_2}{z_1}\right)} = \dfrac{\bar{z}_2}{\bar{z}_1}$ を導出せよ．ただし，$\bar{z}$ は z の共役複素数を表すものとする．

(4)　$\bar{z} + 2iz = 1 - i$ を満たす複素数 z を求めよ．

問題 2. 偏角の範囲を $0 \leqq \theta < 2\pi$ として，以下の複素数を極形式で表せ．なお，複素数 z の極形式表示とは，$z = |z|(\cos\theta + i\sin\theta)$ のような形で，$|z|$は大きさなので必ず$\geqq 0$の実数であることに注意せよ．

(1)　$\dfrac{\sqrt{3}}{4} - \dfrac{1}{4}i$　　(2)　$\dfrac{-\sqrt{3}}{2}$　　(3)　$\dfrac{1}{i}$　　(4)　$\sqrt[2]{i}$　（i の 2 乗根）

問題 3. $z = 2\left(\cos\dfrac{\pi}{6} + i\sin\dfrac{\pi}{6}\right)$ のとき，次の(1)～(4)の複素数を極形式，および，$x+iy$ の形で表し、複素平面上に図示せよ．

(1)　$2z$

(2)　$i\,z$

(3)　z^2

(4)　$1/z$

(5)　$\sqrt[2]{z}$