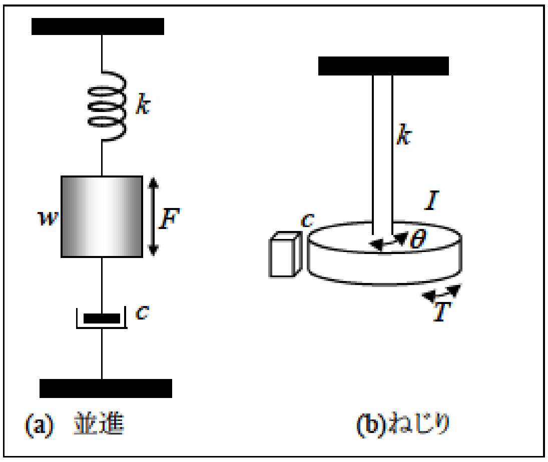
## ２階線形微分方程式と機械振動・回路解析

- 機械系と電気系の方程式
- コンデンサの放電回路
- コンデンサの充電回路

2階線形微分方程式　**機械系**




**(a)並進**

おもりの平行位置からの垂直方向の変位: $y$ (上方向を正), 力 $F$ ＝質量 $m$ ×加速度 $a$, バネ定数 $k$, 摩擦係数 $\rho$, とすると

$$F = ma = -\rho v + k\left(mg/k - y\right) - mg + F_0\cos\omega t$$
$$= -\rho v - ky + F_0\cos\omega t$$

$$m\frac{d^2y}{dt^2} + \rho\frac{dy}{dt} + ky = F_0\cos\omega t, \quad \cdots(1)$$

摩擦も外力も無ければ

$m\dfrac{d^2y}{dt^2} + ky = 0$より, $\dfrac{d^2y}{dt^2} + \dfrac{k}{m}y = 0$。

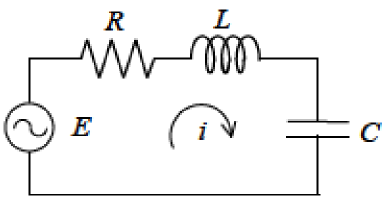
$\lambda^2 + \dfrac{k}{m} = \lambda^2 + {\omega_0}^2 = 0$より, $\lambda = \pm j\omega_0$

$$y = c_1{}' e^{j\omega_0} + c_2{}' e^{-j\omega_0} = c_1\cos\omega_0 + c_2\sin\omega_0$$

(b)ねじり

$$I\frac{d^2\theta}{dt^2} + c\frac{d\theta}{dt} + k\theta = T_0\cos\omega t \quad \cdots(2)$$

**電気系（直列）キルヒホッフの第二法則**




回路素子電圧:インダクタ: $L\dfrac{di}{dt}$,　抵抗: $Ri$,

コンデンサ: $\dfrac{1}{C}\int^t i\,dt$, 電源: $E = E_0\cos\omega t$,

$$L\frac{di}{dt} + Ri + \frac{1}{C}\int^t i\,dt = E_0\cos\omega t \quad \cdots(2)$$

$Q = \int^t i\,dt$とおくことで,

$$L\frac{d^2Q}{dt^2} + R\frac{dQ}{dt} + \frac{Q}{C} = E_0\cos\omega t \quad \cdots(3)$$

初期条件は

$$Q(0) = \int^{t=0} i\,dt = Q_0, \quad \left.\frac{dQ}{dt}\right|_{t=0} = i(0) = i_0$$

(2)を時間微分すると

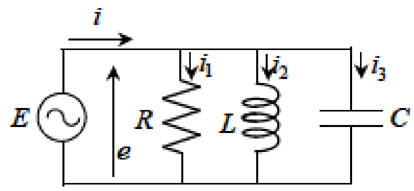
$$L\frac{d^2i}{dt^2} + R\frac{di}{dt} + \frac{i}{C} = -\omega E_0\sin\omega t \quad \cdots(4)$$

初期条件は$i(0) = i_0$, $\left.\dfrac{di}{dt}\right|_{t=0} = i_0'$。

なお(2)より

$$\frac{di}{dt} = \frac{1}{L}\left(E_0\cos\omega t - Ri - \frac{1}{C}\int^t i\,dt\right) \quad \cdots(5)$$

**電気系（並列）キルヒホッフの第一法則**




素子を流れる電流:インダクタ: $\dfrac{1}{L}\int^t e\,dt$, 抵抗: $\dfrac{e}{R}$, コンデンサ: $C\dfrac{de}{dt}$ , 印加電流 $I_0\cos\omega t$

$$C\frac{de}{dt} + \frac{1}{R}e + \frac{1}{L}\int^t e\,dt = I_0\cos\omega t \quad \cdots(6)$$

$U = \int^t e\,dt$とおくことで,

$$C\frac{d^2U}{dt^2} + \frac{1}{R}\frac{dU}{dt} + \frac{U}{L} = I_0\cos\omega t \quad \cdots(7)$$

初期条件は

$$U(0) = \int^{t=0} e\,dt = U_0, \quad \left.\frac{dU}{dt}\right|_{t=0} = e_0$$

(6)を時間微分すると

$$C\frac{d^2e}{dt^2}+\frac{1}{R}\frac{de}{dt}+\frac{e}{L}=-\omega I_0\sin\omega t \quad \cdots(8)$$

初期条件は

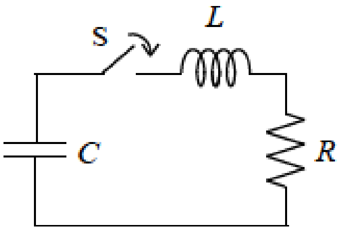
$$e(0)=e_0,\quad \left.\frac{de}{dt}\right|_{t=0}=e_0'$$

(1)(3)(4)(7)(8)は本質的に同じ

**電気系と機械系の対比（(1)(3)(4)式）**

| 並進－機械系 | 直列－電気系 |
|---|---|
| 質量 $w/g$ | インダクタンス $L$ |
| 摩擦 $c$ | 抵抗 $R$ |
| バネ定数 $k$ | キャパシタンスの逆数 $1/C$ |
| 力 $F$ | 印加電圧 $E$（印加電圧の時間微分 $E'$） |
| 変位 $y$ | 電荷 $Q$（電流 $i$） |

RLC 回路




**コンデンサの放電回路―1**

コンデンサはスイッチを閉じる前に電圧 $V_0$ に充電されている（初期電荷 $Q_0=CV_0$）

(4)式より

$$\frac{d^2i}{dt^2}+\frac{R}{L}\frac{di}{dt}+\frac{i}{CL}=0$$

特性方程式より

$$\lambda^2+\frac{R}{L}\lambda+\frac{1}{CL}=0,$$

$$\lambda_{1,2}=\frac{1}{2}\left\{-\frac{R}{L}\pm\sqrt{\left(\frac{R}{L}\right)^2-4\frac{1}{CL}}\right\}=-\frac{R}{2L}\pm\sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2-\frac{1}{CL}}$$

よって根の実数部分は常に負。ルート内の符号に応じて3つに分類。$R^2 >=< 4\frac{L}{C}$

① $R^2>4\frac{L}{C}$（異なる2実根）：過制動

$$\lambda_{1,2}=-\frac{R}{2L}\pm\sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2-\frac{1}{CL}}=-\frac{1}{\tau}\pm\omega \quad とおく$$

$$i(t)=c_1e^{\lambda_1 t}+c_2e^{\lambda_2 t}=c_1e^{\left(-\frac{1}{\tau}+\omega\right)t}+c_2e^{\left(-\frac{1}{\tau}-\omega\right)t}$$

$$=e^{-\frac{t}{\tau}}\left(c_1e^{\omega t}+c_2e^{-\omega t}\right)$$

$i(0)=e^0\left(c_1e^0+c_2e^0\right)=0$ より，$c_1=-c_2$，よって

$$i(t)=c_1e^{-\frac{t}{\tau}}\left(e^{\omega t}-e^{-\omega t}\right)=2c_1e^{-\frac{t}{\tau}}\frac{e^{\omega t}-e^{-\omega t}}{2}$$

$$=2c_1e^{-\frac{t}{\tau}}\sinh\omega t$$

ここで，

$$\frac{di(t)}{dt}=2c_1\left(-\frac{1}{\tau}e^{-\frac{t}{\tau}}\sinh\omega t+e^{-\frac{t}{\tau}}\omega\cosh\omega t\right)。$$

$t=0$ での値を $L\frac{di(t)}{dt}+Ri+\frac{1}{C}\int_t^0 i\,dt=0$ より考えると，コンデンサの初期電圧は $V_0$ だから

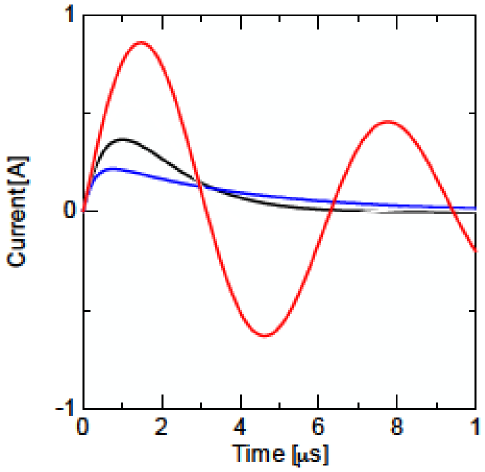
$$\left.\frac{di(t)}{dt}\right|_{t=0}=2c_1\omega=\frac{1}{L}\left[-Ri-\frac{1}{C}\int^t i\,dt\right]_{t=0}$$

$$=\frac{1}{L}\left(Ri(0)+\frac{1}{C}\int_t^0 i\,dt\right)=\frac{V_0}{L}$$

よって，$c_1=\frac{V_0}{2\omega L}$ だから，

$$i=\frac{V_0}{\omega L}e^{-\frac{R}{2L}t}\sinh\omega t,\quad \omega=\sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2-\frac{1}{CL}}$$

② $R^2=4\frac{L}{C}$（重根）：臨界制動




電流波形:
青:過制動, 黒:臨界制動, 赤:減衰振動

$$\lambda = -\frac{R}{2L} = -\frac{1}{\tau},$$

$$i(t) = c_1 e^{-\frac{1}{\tau}t} + c_2 t e^{-\frac{1}{\tau}t} = e^{-\frac{1}{\tau}t}\left(c_1 + c_2 t\right),$$

$i(0) = e^0\left(c_1 + 0\right) = 0$ より, $c_1 = 0$, よって

$i(t) = c_2 t e^{-\frac{t}{\tau}}$。前と同様, 初期条件を考えて,

$$\left.\frac{di(t)}{dt}\right|_{t=0} = c_2 e^{-\frac{t}{\tau}} + c_2 t\left(-\frac{1}{\tau}\right)e^{-\frac{t}{\tau}}$$

$$= c_2 e^{-\frac{t}{\tau}}\left[1 - \frac{t}{\tau}\right]_{t=0} = c_2 = \frac{V_0}{L}$$

より, $i = \frac{V_0}{L} t\, e^{-\frac{R}{2L}t}$

③ $R^2 < 4\frac{L}{C}$ (虚根) : 減衰振動

$\lambda_{1,2} = -\frac{R}{2L} \pm j\sqrt{\frac{1}{CL} - \left(\frac{R}{2L}\right)^2} = \alpha \pm j\omega$　とおくと

$$i = e^{\alpha x}\left(c_1 \cos\omega x + c_2 \sin\omega x\right)$$
$$= e^{-\frac{R}{2L}t}\left(c_1 \cos\omega x + c_2 \sin\omega x\right)$$

$i(0) = e^0\left(c_1 + c_2 \cdot 0\right) = 0$ より, $c_1 = 0$, よって

$$i(t) = c_2 e^{-\frac{R}{2L}t} \sin\omega t$$

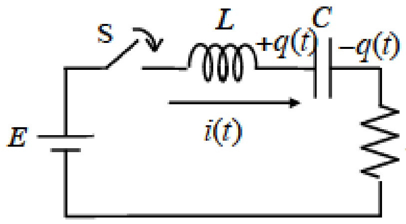
$$\left.\frac{di(t)}{dt}\right|_{t=0} = \left[-c_2 \frac{R}{2L} e^{-\frac{R}{2L}t} \sin\omega t + c_2 e^{-\frac{R}{2L}t}\omega \cos\omega t\right]_{t=0}$$

$$= c_2\omega = \frac{V_0}{L} \qquad c_2 = \frac{V_0}{\omega L}$$

$$i = \frac{V_0}{\omega L} e^{-\frac{R}{2L}t} \sin\omega t, \quad \omega = \sqrt{\frac{1}{CL} - \left(\frac{R}{2L}\right)^2}$$

RLC **回路**

充電回路




初期電荷 $q(0)=0$，初期電流 $i(0)=0$。

$$\frac{q}{C}+L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}+Ri=E$$

が成り立っている。この場合 $i=\dfrac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t}$ であることに注意すると，非斉次方程式

$$\frac{\mathrm{d}^2q}{\mathrm{d}t^2}+\frac{R}{L}\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t}+\frac{q}{CL}=\frac{E}{L}$$

が成り立つ。この特殊解は $q_s=CE$。斉次方程式は

$$\frac{\mathrm{d}^2q}{\mathrm{d}t^2}+\frac{R}{L}\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t}+\frac{q}{CL}=0$$

特性方程式より

$$\lambda^2+\frac{R}{L}\lambda+\frac{1}{CL}=0,$$

$$\lambda_{1,2}=\frac{1}{2}\left\{-\frac{R}{L}\pm\sqrt{\left(\frac{R}{L}\right)^2-4\frac{1}{CL}}\right\}=-\frac{R}{2L}\pm\sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2-\frac{1}{CL}}$$

よって根の実数部分は常に負。ルート内の符号に応じて3つに分類。$R^2 >=< 4\dfrac{L}{C}$

① $R^2>4\dfrac{L}{C}$ (異なる2実根) : 過制動

$$\lambda_{1,2}=-\frac{R}{2L}\pm\sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2-\frac{1}{CL}}=-\frac{1}{\tau}\pm\omega \quad とおく$$

$q(t)=\mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}}\left(c_1\mathrm{e}^{\omega t}+c_2\mathrm{e}^{-\omega t}\right)+CE$ より，

$q(0)=c_1+c_2+CE=0$

$$i(t)=\frac{dq}{dt}$$

$$=c_1\left(-\frac{1}{\tau}+\omega\right)\mathrm{e}^{\left(-\frac{1}{\tau}+\omega\right)t}+c_2\left(-\frac{1}{\tau}-\omega\right)\mathrm{e}^{\left(-\frac{1}{\tau}-\omega\right)t}$$

より，$i(0)=c_1\left(-\dfrac{1}{\tau}+\omega\right)+c_2\left(-\dfrac{1}{\tau}-\omega\right)=0$

よって $c_1=-\dfrac{CE}{2}\left(1+\dfrac{1}{\omega\tau}\right)$，$c_2=-\dfrac{CE}{2}\left(1-\dfrac{1}{\omega\tau}\right)$

$q(t)$

$$=CE\left[1-\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}}\left\{\left(1+\frac{1}{\omega\tau}\right)\mathrm{e}^{\omega t}+\left(1-\frac{1}{\omega\tau}\right)\mathrm{e}^{-\omega t}\right\}\right]$$

② $R^2=4\dfrac{L}{C}$ (重根) : 臨界制動

$$\lambda=-\frac{R}{2L}=-\frac{1}{\tau},$$

$q(t)=c_1\mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}}+c_2t\mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}}+CE$ より，

$$=\mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}}(c_1+c_2t)+CE$$

$q(0)=c_1+CE=0$。$c_1=-CE$

$i(t)=\dfrac{dq}{dt}=\mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}}\left\{-\dfrac{1}{\tau}(c_1+c_2t)+c_2\right\}$ より，

$i(0)=-\dfrac{c_1}{\tau}+c_2=0$。よって，$c_2=-\dfrac{CE}{\tau}$。

$$q(t)=CE\left\{1-\mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}}\left(1+\frac{t}{\tau}\right)\right\}$$

③ $R^2<4\dfrac{L}{C}$ (虚根) : 減衰振動

$\lambda_{1,2}=-\dfrac{R}{2L}\pm j\sqrt{\dfrac{1}{CL}-\left(\dfrac{R}{2L}\right)^2}=-\dfrac{1}{\tau}\pm j\omega$ とおくと

$q(t)=\mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}}(c_1\cos\omega t+c_2\sin\omega t)+CE$ より，

$q(0)=c_1+CE=0$。$c_1=-CE$

$$i(t)=\frac{dq}{dt}$$

$$=-\mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}}\left\{\frac{1}{\tau}(c_1\cos\omega t+c_2\sin\omega t)+\omega(c_1\sin\omega t-c_2\cos\omega t)\right\}$$

より，$i(0)=-\dfrac{c_1}{\tau}+\omega c_2=0$。よって，$c_2=-\dfrac{CE}{\omega\tau}$。

$$q(t)=CE\left\{1-\mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}}\left(\cos\omega t+\frac{1}{\omega\tau}\sin\omega t\right)\right\}$$