解析学理解度の確認（３）解答例

問題 1.

(A) これは一階線形非斉次方程式である。様々な解き方があると思われるが、左辺に積の微分の公式を適用すると、与式を

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(xy\right)=x^2$$

と変形することが可能である。そこで上式の両辺を x で積分すると

$$xy=\int x^2\,\mathrm{d}x=\frac{1}{3}x^3+C$$

を一般解として得ることが可能である。C は任意定数である。あるいは定義域について $x\neq 0$ であるから

$$y=\frac{1}{3}x^2+\frac{C}{x}$$

と書くことも可能である。

(B) これは同次形である。$y=ux$ とすれば、与式は $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{1+2u}{u^2-1}$ と変形できる。$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=u+x\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}$ と変形し、y を u で表現するようにすると、$u+x\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=\frac{1+2u}{u^2-1}$ であるから $x\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=\frac{1+2u}{u^2-1}-u=\frac{1+3u-u^3}{u^2-1}=-\frac{u^3-3u-1}{u^2-1}$ と変形でき、従って変数分離形ゆえ $\frac{u^2-1}{u^3-3u-1}\mathrm{d}u=-\frac{1}{x}\mathrm{d}x$ となって、両辺を積分でき、$\int\frac{u^2-1}{u^3-3u-1}\mathrm{d}u=-\int\frac{1}{x}\mathrm{d}x$ から $\frac{1}{3}\log\left|u^3-3u-1\right|=-\log\left|x\right|+C_0$ すなわち $\log\left|u^3-3u-1\right|=-3\log\left|x\right|+C_1$ と変形される。ここで $u=y/x$ と u を元に戻せば $y^3-3x^2y-x^3=C$ を一般解として得る。C は任意定数である。

なお、完全微分形と考えても解くことが可能で、$\left(x^2+2xy\right)\mathrm{d}x+\left(x^2-y^2\right)\mathrm{d}y=0$ と変形して、完全微分形であることに着目して左辺を $\mathrm{d}\left(\frac{1}{3}x^3+x^2y-\frac{1}{3}y^2\right)=0$ と変形すれば,

両辺を(-3)倍して直ちに $y^3-3x^2y-x^3=C$ を得る。

(C) これは 1 階線形非斉次常微分方程式である。いろいろな解法があるが、最も見通し良く間違いが少ないのは、両辺に exp x をかけて d/dx を括り出す方法である。すなわち与式の両辺に exp x をかけると $\left(\exp x\right)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+\left(\exp x\right)y=1$ となり、左辺の形に着目すると $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[\left(\exp x\right)y\right]=1$ と変形できる。この両辺を x で積分すると、$\left(\exp x\right)y=x+C$ となるので、

$y = x\exp(-x) + C\exp(-x)$ を一般解として得る。C は任意定数である。

問題２

ア－ B, イ－ B, ウ－ B, エ－ C, オ－ B, カ－ A, キ－ B