

8. 変数係数2階線形斉次方程式

目標

- 2階線形斉次方程式を解く手順が理解できる
- 基本解の一つがべき関数の場合に一般解を求められる
- 基本解の一つが指数関数の場合に一般解を求められる
- 定数変化法で1つの基本解から一般解が導ける

8.1 2階線形斉次方程式を解く手順

- 2階線形斉次方程式

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0 \quad (8.1)$$

は、以下の手順で解くことができる。

1. 基本解の1つを求める。

- 定数係数の場合は7章の通り、**特性方程式**を用いて解くことができる。変数係数の場合には一般的解法はない。

- たとえば、基本解の関数形を $y = x^m$ あるいは $y = \exp(mx)$ と仮定して斉次方程式(8.1)に代入し、解となる定数 m が決まるかどうか検討する。

2. 1.で求めた基本解を用いて、2階線形斉次方程式をとく。

- こちらは、定数変化法により機械的に行うことが可能である。

Variation of constants

8.2 基本解の関数形が $y = x^m$ となる例

- 斉次方程式(8.1)において、 $p(x)$ と $q(x)$ が

$$m(m-1) + mxp(x) + x^2q(x) = 0$$

を満足するとき、基本解の関数形は

$$y = x^m$$

となる。これは以下のように確認できる。

$y = x^m$ とおくと、 $y' = mx^{m-1}$, $y'' = m(m-1)x^{m-2}$ であるから、

$$\begin{aligned} y'' + p(x)y' + q(x)y &= m(m-1)x^{m-2} + mx^{m-1}p(x) + x^m q(x) \\ &= x^{m-2} \{m(m-1) + mxp(x) + x^2 q(x)\} = 0 \text{ となる。} \end{aligned}$$

例題8.1 $y'' + \frac{x}{x+1}y' - \frac{1}{x+1}y = 0$ の基本解を $y = x^m$ の関数形で求める

(解) $p(x) = \frac{x}{x+1}$, $q(x) = -\frac{1}{x+1}$ であるので

$$\begin{aligned} m(m-1) + mxp(x) + x^2q(x) &= m(m-1) + mx \frac{x}{x+1} + x^2 \left(-\frac{1}{x+1} \right) \\ &= (m-1) \frac{m+x^2}{x+1} \end{aligned}$$

となる。

$m = 1$ のとき $m(m-1) + mxp(x) + x^2q(x) = 0$ となるので、 $y = x^1 = x$ が基本解となる。



8.3 基本解の関数形が $y = \exp(mx)$ となる例

- 斉次方程式(8.1)において、 $p(x)$ と $q(x)$ が

$$m^2 + mp(x) + q(x) = 0$$

を満足するとき、基本解の関数形は

$$y = \exp(mx)$$

となる。これは以下のように確認できる。

$y = \exp(mx)$ とおくと、 $y' = m \exp(mx)$, $y'' = m^2 \exp(mx)$ であるから、 $y'' + p(x)y' + q(x)y =$

$$m^2 \exp(mx) + mp(x) \exp(mx) + q(x) \exp(mx)$$

$= \exp(mx) \{m^2 + mp(x) + q(x)\}$ となるので、 $m^2 + mp(x) + q(x) = 0$ のとき、 $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$ となる。

例題8.2 $y'' + \frac{x}{x+1}y' - \frac{1}{x+1}y = 0$ の基本解を $y = \exp(mx)$ の関数形で求める

(解) $p(x) = \frac{x}{x+1}$, $q(x) = -\frac{1}{x+1}$ であるので

$$m^2 + mp(x) + q(x) = m^2 + m\frac{x}{x+1} - \frac{1}{x+1}$$
$$= (m+1)\frac{mx+m-1}{x+1} \quad \text{となる。}$$

$m = -1$ のとき $m^2 + mp(x) + q(x) = 0$

となるので、 $y = \exp(-1 \cdot x) = \exp(-x)$ が基本解となる。例題8.1とは異なる基本解が得られた。



8.4 1つの基本解から2階線形斉次方程式を解く方法

- 8.2 – 8.3節で述べたいずれかの方法により求められた1つの基本解 y_1 から、2階線形斉次方程式を**定数変化法**で解く。
- 基本解 y_1 の係数を x の未知関数 $c(x)$ と置き換えて**

$$y = cy_1 \quad (8.2)$$

として微分方程式(8.1)を解く。

- 2つの関数 c と y_1 はともに x の関数であることに留意すれば、 y の1階、2階導関数はそれぞれ

$$y' = c'y_1 + cy_1' \quad (8.3)$$

$$y'' = c''y_1 + 2c'y_1' + cy_1'' \quad (8.4)$$

となる。式(8.2) – (8.4)を式(8.1)に代入し整理する。₈

8.4

つづき

$$(c''y_1 + 2c'y_1' + cy_1'') + (c'y_1 + cy_1')p(x) + cy_1q(x) = 0$$

より

$$c\{y_1'' + p(x)y_1' + q(x)y_1\} + \{c''y_1 + 2c'y_1' + c'y_1p(x)\} = 0$$

となる。ここに、 y_1 は2階線形斉次方程式(8.1)の解であるので、左辺第1項は $y_1'' + p(x)y_1' + q(x)y_1 = 0$ となる。

また、左辺第2項中の各項を y_1 で割ると共に整理すると

$$c'' + \left\{ p(x) + 2\frac{1}{y_1}y_1' \right\} c' = 0$$

となる。この方程式は $c' = v$ とおくことで

8.4

さらにつづき

$$v' + \left\{ p(x) + 2 \frac{1}{y_1} y_1' \right\} v = 0$$

- となり、 v に関する1階変数分離形微分方程式とみなせる。以下のように容易に解ける。

$$\frac{1}{v} \frac{dv}{dx} = - \left\{ p(x) + 2 \frac{1}{y_1} \frac{dy_1}{dx} \right\}$$

$$\int \frac{1}{v} dv = - \int p(x) dx - 2 \log |y_1| + C_{20}$$

- ここで、 $|y_1|^{-2} = y_1^{-2}$ であることに留意すると、

$$\log |v| = - \int p(x) dx + \log y_1^{-2} + C_{20}$$

8.4

さらにつづき

$$|v| = \frac{\exp C_{20}}{y_1^2} \exp \left\{ -\int p(x) dx \right\}$$

$$v = c' = \frac{C_2}{y_1^2} \exp \left\{ -\int p(x) dx \right\}$$

- ただし $C_2 = \pm \exp C_{20}$ である。もう一回 x で積分すると

$$c = C_2 \int \frac{1}{y_1^2} \exp \left\{ -\int p(x) dx \right\} dx + C_1$$

- よって、一般解 y は

$$y = cy_1 = C_2 y_1 \int \frac{1}{y_1^2} \exp \left\{ -\int p(x) dx \right\} dx + C_1 y_1 \quad (8.5)$$

と求まった。

8.4

さらにつづき

- 式(8.1)は2階微分方程式であるので、その一般解 $C_1y_1 + C_2y_2$ は2つの任意定数 C_1 と C_2 を含む。
- なお、 y_1 とは異なるもう一つの基本解 y_2 は、式(8.5)の第1項から

$$y_2 = y_1 \int \frac{1}{y_1^2} \exp \left\{ - \int p(x) dx \right\} dx \quad (8.6)$$

となる。

例題8.3 $y'' + \frac{x}{x+1}y' - \frac{1}{x+1}y = 0$ を、その1つの基本解 $y_1 = x$ を用いて解く。

(解) 導出手順を理解するため、式(8.6)を直接使わずに解く。

基本解 y_1 の係数を x の未知関数 c と置き換え、 $y = cx$ とおく。 $y' = c'x + c$, $y'' = c''x + 2c'$ とともに微分方程式に代入すると

$$(c''x + 2c') + \frac{x}{x+1}(c'x + \cancel{c}) - \frac{1}{x+1}\cancel{cx} = 0$$

のように斉次方程式の基本解 y_1 の部分

$$c\left(y_1'' + \frac{x}{x+1}y_1' - \frac{1}{x+1}y_1\right) = c\left(0 + \frac{x}{x+1} \cdot 1 - \frac{1}{x+1}x\right) = 0$$

- がキャンセルされる。

$$c''x + c'\left(2 + \frac{x^2}{x+1}\right) = c''x + c'\frac{x^2 + 2x + 2}{x+1} = 0$$

- となるので、 $c' = v$ とおくと、

$$v'x + v\frac{x^2 + 2x + 2}{x+1} = 0$$

- となる。この式は

$$\frac{1}{v}v' = \frac{1}{v}\frac{dv}{dx} = -\frac{x^2 + 2x + 2}{x^2 + x} = -1 - \frac{x+2}{x^2+x} = -1 - \frac{2}{x} + \frac{1}{x+1}$$

- と変形できる。両辺を x で積分すると

$$\int \frac{1}{v} dv = \int \left(-1 - \frac{2}{x} + \frac{1}{x+1} \right) dx$$

$$\log|v| = -x - 2\log|x| + \log|x+1| + C_{20}$$

$$= \log \left\{ \frac{|x+1|}{x^2} \exp(C_{20} - x) \right\} \quad \text{となるので}$$

$$c' = v = -C_2 \frac{x+1}{x^2} \exp(-x) \text{となる。ここに、} C_2 = \mp \exp C_{20} \text{である。}$$

もう一回上式を積分すると

$$c = -C_2 \int \frac{x+1}{x^2} \exp(-x) dx = C_2 \frac{\exp(-x)}{x} + C_1$$

- となる。この変形は次の部分積分

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{x} \exp(-x) dx &= \int \left[-\frac{1}{x} \{ \exp(-x) \}' \right] dx \\ &= -\frac{1}{x} \{ \exp(-x) \} - \int \left[\frac{1}{x^2} \exp(-x) \right] dx\end{aligned}$$

- で右辺の第2項を左辺に移項すると導出できる。よって一般解は $y = cx = C_2 \exp(-x) + C_1 x$ となる。
- 一方、公式(8.6)をそのまま使うと、 $p(x) = \frac{x}{x+1}$ であるから、もう一つの基本解は

$$\begin{aligned}
 y_2 &= x \int \frac{1}{x^2} \exp\left(-\int \frac{x}{x+1} dx\right) dx = x \int \frac{1}{x^2} \exp\{-x + \log|x+1|\} dx \\
 &= x \int \frac{x+1}{x^2} \exp(-x) dx = x \frac{\exp(-x)}{x} = \exp(-x)
 \end{aligned}$$

- となる。また、基本解を求めるときの積分演算では任意定数をつける必要がないことに留意する。
- よって、問題の微分方程式の一般解は、同様に $y = C_1 x + C_2 \exp(-x)$ となる。



9. 2階線形非斉次方程式

目標

- 2階線形非斉次方程式の意味が理解できる
- 定数変化法により2階線形非斉次方程式が解ける

9.1 2階線形非斉次方程式とは

- 2階線形方程式

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = r(x) \quad (9.1)$$

において、 $r(x) \neq 0$ である方程式を2階線形非斉次方程式(または2階線形非同次方程式)という。

また、 $r(x)$ を非斉次項という。

9.2 定数変化法による解き方

- 2階線形斉次方程式

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0 \quad (9.2)$$

の一般解は、2つの基本解 y_1 と y_2 を用いて、 $y = C_{10}y_1 + C_{20}y_2$ で表される。

- この式において、2つの任意定数 C_{10} と C_{20} を2つの x の未知関数 c_1 と c_2 で置き換え、

$$y = c_1y_1 + c_2y_2 \quad (9.3)$$

として2階線形非斉次方程式(9.1)を解く。ここでは、 y_1 と y_2 の関数形を既知とするので、2つの未知関数 c_1 と c_2 が求まれば良い。

- そのために、 c_1 と c_2 に関する2つの1次方程式を導出する。
- 4つの関数 c_1, c_2, y_1, y_2 が x の関数であることに注意すると、 y の1階導関数は

$$y' = c_1' y_1 + c_2' y_2 + c_1 y_1' + c_2 y_2'$$

となる。

- ここで、以下の計算を簡単にすべく、 c_1' と c_2' に関する1次方程式の1つとして、

$$c_1' y_1 + c_2' y_2 = 0 \quad (9.4)$$

と与えて導出を進める。

- これにより式(9.3)の1階導関数は

$$y' = c_1 y_1' + c_2 y_2' \quad (9.5)$$

と簡潔になり、式(9.3)の2階導関数は

$$y'' = c_1 y_1'' + c_2 y_2'' + c_1' y_1' + c_2' y_2' \quad (9.6)$$

となった。式(9.3), (9.5), (9.6)を式(9.1)に代入し整理する。

$$(c_1 y_1'' + c_2 y_2'' + c_1' y_1' + c_2' y_2') + (c_1 y_1' + c_2 y_2') p(x) + (c_1 y_1 + c_2 y_2) q(x) = r(x)$$

より、

$$c_1 \{y_1'' + p(x)y_1' + q(x)y_1\} + c_2 \{y_2'' + p(x)y_2' + q(x)y_2\} + (c_1' y_1' + c_2' y_2') = r(x)$$

となる。

- ここで、 y_1 と y_2 は対応する2階線形斉次方程式(9.2)の解であるので、左辺第1 - 2項はともにゼロとなる。よって

$$c_1' y_1' + c_2' y_2' = r(x) \quad (9.7)$$

となり、 c_1' と c_2' に関する式がもう一つ得られた。

- 式(9.4)と式(9.7)を連立させて c_1' と c_2' を解くと、

$$c_1' = -\frac{r(x)y_2}{w}$$

w はもちろんワronスキアン

$$c_2' = \frac{r(x)y_1}{w}$$

となる。

- それぞれ x で積分すると

$$c_1 = -\int \frac{r(x)y_2}{w} dx + C_1$$

$$c_2 = \int \frac{r(x)y_1}{w} dx + C_2$$

- ここに、 c_1 と c_2 は任意定数である。よって非斉次方程式の一般解は

$$\begin{aligned} y = c_1 y_1 + c_2 y_2 &= \left\{ -\int \frac{r(x)y_2}{w} dx + C_1 \right\} y_1 + \left\{ \int \frac{r(x)y_1}{w} dx + C_2 \right\} y_2 \\ &= -y_1 \int \frac{r(x)y_2}{w} dx + y_2 \int \frac{r(x)y_1}{w} dx + C_1 y_1 + C_2 y_2 \quad (9.8) \end{aligned}$$

となる。

- 式(9.2)は2階微分方程式であるので、その一般解(9.8)は2つの任意定数 C_1 と C_2 を含む。
- 式(9.8)の右辺の第1項と第2項は非斉次方程式の特殊解である。
- また、第3項と第4項は対応する斉次方程式(9.2)の一般解である。

例題9.1 $y'' + \frac{x}{x+1}y' - \frac{1}{x+1}y = x+1$ を解く。

(解) 対応する斉次方程式 $y'' + \frac{x}{x+1}y' - \frac{1}{x+1}y = 0$

の2つの基本解は、例題8.3で示したように

$y_1 = x$ と $y_2 = \exp(-x)$ である。よってロンスキアン w は

$$w = \begin{vmatrix} x & \exp(-x) \\ 1 & -\exp(-x) \end{vmatrix} = -x \exp(-x) - \exp(-x) = -(x+1) \exp(-x)$$

となる。また、 $r(x) = x+1$ であるので、

例題9.1 続き

$$-y_1 \int \frac{r(x)y_2}{w} dx = -x \int \frac{(x+1)\exp(-x)}{-(x+1)\exp(-x)} dx = x \int dx$$

$$= x(x + C_1) = x^2 + C_1 x$$

$$y_2 \int \frac{r(x)y_1}{w} dx = \exp(-x) \int \frac{(x+1)x}{-(x+1)\exp(-x)} dx$$

$$= -\exp(-x) \int x \exp x dx$$

$$= -\exp(-x) \{ (x-1)\exp x + C_2 \}$$

$$= -x + 1 - C_2 \exp(-x)$$

例題9.1 さらに続き

- よって

$$\begin{aligned}y &= (x^2 + C_1x) + \{-x + 1 - C_2 \exp(-x)\} \\ &= x^2 - x + 1 + C_1x - C_2 \exp(-x)\end{aligned}$$

- である。なお、 C_2 は任意定数であるので、 C_2 の前の符号は正でもよく、 x の係数はまとめて別の任意定数とおいても良い。
- すなわち、 $y = x^2 + 1 + C_{10}x + C_{20}\exp(-x)$ でもよい。ただし、 $C_{10} = C_1 - 1$, $C_{20} = -C_2$ である。



例題9.2 $y'' - (A_1 + A_2)y' + A_1A_2y = \exp(Bx)$ を解く。ただし A_1, A_2, B は定数であるが、 $A_1 \neq B, A_2 \neq B, A_1 \neq A_2$ である。

(解) 対応する斉次方程式 $y'' - (A_1 + A_2)y' + A_1A_2y = 0$ の2つの基本解は式(7.9)に示されている通り、 $y_1 = \exp(A_1x), y_2 = \exp(A_2x)$ である。よってロンスキアンは

$$\begin{aligned} w &= \begin{vmatrix} \exp(A_1x) & \exp(A_2x) \\ A_1 \exp(A_1x) & A_2 \exp(A_2x) \end{vmatrix} \\ &= A_2 \exp\{(A_1 + A_2)x\} - A_1 \exp\{(A_1 + A_2)x\} \\ &= (A_2 - A_1) \exp\{(A_1 + A_2)x\} \end{aligned}$$

例題9.2 つづき

となる。また、 $r(x) = \exp(Bx)$ であるので、

$$\begin{aligned} -y_1 \int \frac{r(x)y_2}{w} dx &= -\exp(A_1 x) \int \frac{\exp(Bx)\exp(A_2 x)}{(A_2 - A_1)\exp\{(A_1 + A_2)x\}} dx \\ &= -\frac{\exp(A_1 x)}{A_2 - A_1} \int \exp\{(B - A_1)x\} dx \\ &= -\frac{\exp(A_1 x)}{A_2 - A_1} \left[\frac{\exp\{(B - A_1)x\}}{B - A_1} + C_{10} \right] \\ &= -\frac{\exp(Bx)}{(A_2 - A_1)(B - A_1)} - \frac{C_{10} \exp(A_1 x)}{A_2 - A_1} \end{aligned}$$

例題9.2 さらにつづき

$$\begin{aligned} y_2 \int \frac{r(x)y_1}{w} dx &= \exp(A_2 x) \int \frac{\exp(Bx)\exp(A_1 x)}{(A_2 - A_1)\exp\{(A_1 + A_2)x\}} dx \\ &= \frac{\exp(Bx)}{(A_2 - A_1)(B - A_2)} + \frac{C_{20} \exp(A_2 x)}{A_2 - A_1} \end{aligned}$$

となる。従って、一般解は

$$\begin{aligned} y = & \left\{ -\frac{\exp(Bx)}{(A_2 - A_1)(B - A_1)} - \frac{C_{10} \exp(A_1 x)}{A_2 - A_1} \right\} \\ & + \left\{ \frac{\exp(Bx)}{(A_2 - A_1)(B - A_2)} + \frac{C_{20} \exp(A_2 x)}{A_2 - A_1} \right\} \end{aligned}$$

例題9.2 さらにつづき

$$\begin{aligned} y &= \frac{-(B-A_2)+(B-A_1)}{(A_2-A_1)(B-A_1)(B-A_2)} \exp(Bx) \\ &\quad - \frac{C_{10} \exp(A_1x)}{A_2-A_1} + \frac{C_{20} \exp(A_2x)}{A_2-A_1} \\ &= \frac{1}{(B-A_1)(B-A_2)} \exp(Bx) + C_1 \exp(A_1x) + C_2 \exp(A_2x) \end{aligned}$$

となる。なお、 $C_1 = -\frac{C_{10}}{A_2-A_1}$, $C_2 = \frac{C_{20}}{A_2-A_1}$ とおいた。



例題9.3 $y'' - (A_1 + A_2)y' + A_1A_2y = \exp(A_1x)$ を
解く。ただし A_1, A_2 は定数であるが、
 $A_1 \neq A_2$ である。

(解) この例は、例題9.2において、**非斉次項の指数関数の引数の係数 A_1 が特性方程式の解の1つに等しい場合**である。

ロンスキアンは、例題9.2と同じく

$$w = (A_2 - A_1) \exp \left\{ (A_1 + A_2)x \right\}$$

となる。また、 $r(x) = \exp(A_1x)$ であるので、

例題9.3 つづき

$$\begin{aligned} -y_1 \int \frac{r(x)y_2}{w} dx &= -\exp(A_1 x) \int \frac{\exp(A_1 x) \exp(A_2 x)}{(A_2 - A_1) \exp\{(A_1 + A_2)x\}} dx \\ &= -\frac{\exp(A_1 x)}{A_2 - A_1} \int dx = -\frac{\exp(A_1 x)}{A_2 - A_1} (x + C_{10}) \\ &= -\frac{x \exp(A_1 x)}{A_2 - A_1} - \frac{C_{10} \exp(A_1 x)}{A_2 - A_1}, \end{aligned}$$

$$y_2 \int \frac{r(x)y_1}{w} dx = \exp(A_2 x) \int \frac{\exp(A_1 x) \exp(A_1 x)}{(A_2 - A_1) \exp\{(A_1 + A_2)x\}} dx$$

例題9.3 さらにつづき

$$\begin{aligned} &= \frac{\exp(A_2 x)}{A_2 - A_1} \int \exp\{(A_1 - A_2)x\} dx \\ &= \frac{\exp(A_2 x)}{A_2 - A_1} \left[\frac{\exp\{(A_1 - A_2)x\}}{A_1 - A_2} + C_{20} \right] = -\frac{\exp(A_1 x)}{(A_2 - A_1)^2} + \frac{C_{20} \exp(A_2 x)}{A_2 - A_1} \end{aligned}$$

となる。従って、一般解は

$$\begin{aligned} y &= \left\{ -\frac{x \exp(A_1 x)}{A_2 - A_1} - \frac{C_{10} \exp(A_1 x)}{A_2 - A_1} \right\} + \left\{ -\frac{\exp(A_1 x)}{(A_2 - A_1)^2} + \frac{C_{20} \exp(A_2 x)}{A_2 - A_1} \right\} \\ &= \frac{1}{A_1 - A_2} x \exp(A_1 x) + C_1 \exp(A_1 x) + C_2 \exp(A_2 x) \end{aligned}$$

例題9.3 さらにつづき

となる。なお、 $C_1 = -\frac{C_{10}}{A_2 - A_1} - \frac{1}{(A_2 - A_1)^2}$, $C_2 = \frac{C_{20}}{A_2 - A_1}$ とおいた。

- 一般解の第1項が非斉次の特殊解に相当するが、その関数形は例題9.2の $\frac{1}{(B - A_1)(B - A_2)} \exp(Bx)$

とは異なり、 $\frac{1}{A_1 - A_2} x \exp(A_1 x)$ のように **指数関数**

に x をかけた形になっていることに注意する。

- 11回目講義pptの64ページ参照

まとめ: 本日の確認事項

- 変数係数の2階線形斉次方程式を解く手順が理解できる
- 基本解の一つがべき関数の場合に一般解を求められる
- 基本解の一つが指数関数の場合に一般解を求められる
- 定数変化法で1つの基本解から一般解が導ける
- 2階線形非斉次方程式の意味が理解できる
- 定数変化法により2階線形非斉次方程式が解ける