解析学演習　微分方程式(第 12 回)　解答例　　2017/5/25

1．(1)[2 点]　$p(x)=\dfrac{2}{x}$，$q(x)=-\dfrac{2}{x^2}$ であるので，

$$m(m-1)+mxp(x)+x^2q(x)=m(m-1)+2m-2=m^2+m-2=(m-1)(m+2)=0$$

より、$m=1,-2$. よって、$y=x^1=x$ と $y=x-2=1/x^2$ が 2 つの基本解となる。

よって、一般解は $y=C_1x+\dfrac{C_2}{x^2}$ となる。ここで，C_1，C_2 は任意定数である。

(2) [3 点]　斉次方程式 $y''+\dfrac{2}{x}y'-\dfrac{2}{x^2}y=0$ の 2 つの基本解は(1)に示したように $y_1(x)=x$，

$y_2(x)=x^{-2}$ である。よって，ロンスキアン w は，

$$w=\begin{vmatrix} x & x^{-2} \\ 1 & -2x^{-3} \end{vmatrix}=-3x^{-2}$$ となる　(1 点)。

また，$r(x)=x$ であるので，

$$-y_1\int\frac{r(x)y_2}{w}dx=-x\int\frac{x\cdot x^{-2}}{-3x^{-2}}dx=\frac{x}{3}\left(\frac{1}{2}x^2+C_{10}\right)=\frac{1}{6}x^3+\frac{C_{10}}{3}x$$ (1 点)

$$y_2\int\frac{r(x)y_1}{w}dx=x^{-2}\int\frac{x\cdot x}{-3x^{-2}}dx=-\frac{1}{3}x^{-2}\int x^4\,dx=-\frac{1}{3}x^{-2}\left(\frac{1}{5}x^5+C_{20}\right)=-\frac{1}{15}x^3-\frac{C_{20}}{3}x^{-2}$$ (1 点)

したがって，一般解は，

$$y=\left(\frac{1}{6}x^3+\frac{C_{10}}{3}x\right)+\left(-\frac{1}{15}x^3-\frac{C_{20}}{3}x^{-2}\right)=\frac{1}{10}x^3+C_1x+C_2x^{-2}$$

となる。ただし、$C_1=\dfrac{C_{10}}{3}, C_2=-\dfrac{C_{20}}{3}$ とおいた。

2．(1) [2 点]　$y''-\dfrac{1}{x}y'+\dfrac{1}{x^2}y=0$ となるので，$p(x)=-\dfrac{1}{x}$，$q(x)=\dfrac{1}{x^2}$ である。

$m(m-1)+mxp(x)+x^2q(x)=m(m-1)+mx\left(-\dfrac{1}{x}\right)+x^2\dfrac{1}{x^2}=(m-1)^2=0$ より、$m=1$.

よって、$y=x^1=x$ が 1 つの基本解となる。 (1 点)。

もう 1 つの基本解は，

$$y_2=x\int\frac{1}{x^2}\exp\left(\int\frac{1}{x}\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}x=x\int\frac{1}{x^2}\exp\left(\log|x|\right)\mathrm{d}x=x\int\frac{1}{x^2}x\,\mathrm{d}x=x\int\frac{1}{x}\mathrm{d}x=x\log|x|$$

となる(1 点)。

よって，一般解は $y = C_1 x + C_2 x \log|x|$ となる。ここで C_1，C_2 は任意定数である。

(2) [3 点]　斉次方程式 $x^2 y'' - xy' + y = 0$，すなわち $y'' - \frac{1}{x} y' + \frac{1}{x^2} y = 0$ の 2 つの基本解は(1)に示したように，$y_1 = x$，$y_2 = x \log|x|$ である。よって，ロンスキアン w は，

$$w = \begin{vmatrix} x & x\log|x| \\ 1 & \log|x| + 1 \end{vmatrix} = x\left(\log|x| + 1\right) - x\log|x| = x$$

となる(1 点)。また，非斉次方程式は $y'' - \frac{1}{x} y' + \frac{1}{x^2} y = 1$ と変形できるから、$r(x) = 1$ であるので，

$$-y_1 \int \frac{r(x) y_2}{w} \mathrm{d}x = -x \int \frac{x\log|x|}{x} \mathrm{d}x = -x \int \log|x| \mathrm{d}x = -x\left(x\log|x| - x + C_1\right) = -x^2 \log|x| + x^2 - C_1 x \qquad (1\text{ 点})$$

$$y_2 \int \frac{r(x) y_1}{w} \mathrm{d}x = x\log|x| \int \frac{x}{x} \mathrm{d}x = x\log|x|\left(x + C_2\right) = x^2 \log|x| + C_2 x \log|x| \qquad (1\text{ 点})$$

したがって，一般解は，

$$y = \left(-x^2 \log|x| + x^2 - C_1 x\right) + \left(x^2 \log|x| + C_2 x \log|x|\right) = x^2 - C_1 x + C_2 x \log|x|$$

となる。C_1 の前の符号は正でも良い。