

1. (1)[2点] $y' = \frac{1}{2}C$ より、 $xy' - (y')^2 = \frac{1}{2}Cx - \frac{1}{4}C^2 = y$ となり、一般解は微分方程式を満足している。

(2)[2点] $y' = \frac{1}{2}x$ より、 $xy' - (y')^2 = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{4}x^2 = \frac{1}{4}x^2 = y$ となって、 $y = \frac{1}{4}x^2$ は微分方程式を満足している。しかし、(1)の一般解で C にどのような定数を入れても $y = \frac{1}{4}x^2$ は得られない。よって、 $y = \frac{1}{4}x^2$ は特異解である。

2. [2点] 両辺を x で積分すると、

$$\int y dy = \int x^2 dx + C_0 \quad \text{すなわち} \quad \frac{y^2}{2} = \frac{x^3}{3} + C_0 \quad \text{となる。ここで } C_0 \text{ は任意定数である。}$$

整理すると $y^2 = \frac{2x^3}{3} + C$ となる。なお、 $C = 2C_0$ とおいた。

3. [2点] $\frac{dy}{dx} = \exp(x-y) = \exp x - \exp y$ より、両辺を $\exp(-y)$ で除すると

$(\exp y) \frac{dy}{dx} = \exp x$ となる。この両辺を x で積分すると $\int \exp y dy = \int \exp x dx + C$ 、すなわち $\exp y = \exp x + C$ となる。ここで C は任意定数である。

4. [2点] $y = x \exp(Cx)$ の両辺を x で微分すると

$$y' = \exp(Cx) + Cx \exp(Cx) \quad (*)$$

となる。この式と元の式から C を消去する。元の式から $C = \frac{\log(y/x)}{x}$ は明らかで、こ

れを*式に代入し、

$$y' = \frac{y}{x} \left[1 + \log\left(\frac{y}{x}\right) \right]$$

が求める微分方程式である。