微分方程式

I. 一階微分方程式

微分方程式 Differential equation

基礎事項

- 微分方程式とは
- 階数
- 一般解と特殊解
- 境界条件と初期条件
- 積分法の復習
- べき級数展開の復習

今日のポイント:
微分方程式の種類を分類できる。
変数分離形に積分を適用し解くことができる。

変数分離形

- 変数分離形とは
- その解法
- $dy/dx = f(Ax + By + C)$ の形の解き方

1. 微分方程式の基礎事項

目標

- 微分方程式の階数の意味が理解できる
- 方程式の線形・非線形の違いが理解できる
- 方程式の斉次・非斉次の違いが理解できる
- 一般解・特殊解の違いが理解できる
- 初期条件・境界条件の意味が理解できる

1.1 微分方程式とは

n 回微分可能な独立変数 x の関数 $y = y(x)$と、その導関数 $y', y'', \ldots, y^{(n)}$ の間に成り立つ関係式

$$f(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)}) = 0$$

を、yを未知関数とする**微分方程式**という。

もちろん、

$$y' = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = y'(x) \qquad \text{1階導関数}$$

$$y'' = \frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2} = y''(x) \qquad \text{2階 〃}$$

$$\vdots$$

$$y^{(n)} = \frac{\mathrm{d}^n y}{\mathrm{d}x^n} = y^{(n)}(x) \qquad n\text{階 〃}$$

- この微分方程式を満足する関数 $y = y(x)$ を「微分方程式の解」という。
- 解を求めること、または解が満たす方程式を、導関数を含まずに表すことを「微分方程式を解く」という。

1.2 階数

order

微分方程式に含まれる導関数の最高階数を、その微分方程式の**階数**という。

例1 $$y' = -y \tag{1.1}$$
は1階微分方程式。

例2 $$y'' = -y \tag{1.2}$$
は2階微分方程式。

線形微分方程式

- 未知関数 y と、その導関数 $y', y'', \ldots, y^{(n)}$ について、1次方程式となっている微分方程式を、n 階**線形微分方程式**という。
  - xについては、その必要はない。

例1 $$y' + p(x)\,y = q(x)$$
は1階**線形**微分方程式。

例2 $$y'' + p(x)\,y' + q(x)\,y = r(x)$$
は2階**線形**微分方程式。

斉次微分方程式

- 前頁の2つの例で、右辺の関数が恒等的にゼロとなる微分方程式を斉次微分方程式（あるいは同次微分方程式）という。
- 右辺の関数が恒等的にはゼロでない微分方程式を非斉次微分方程式（あるいは非同次微分方程式）という。

例1 $$y' + p(x)\,y = 0$$
は斉次微分方程式。

Homogeneous differential equation

例2 $$y'' + p(x)\,y' + q(x)\,y = r(x) \not\equiv 0$$
は非斉次微分方程式。

Non-homogeneous differential equation

非線形微分方程式

- 線形微分方程式でないものを非線形微分方程式という

Non-linear differential equation

例1 $$y' + y^2 = 0$$

はyの2次関数を含むので非線形微分方程式である。

例2 $$y' + x^2 y = e^x$$

は、yについて線形なので「線形微分方程式」である。(xは係数と考える。)

1.3 一般解と特殊解

- n階微分方程式の解は、n個の任意定数を含む。これを**一般解**という。

General solution

- 一般解のn個の任意定数に具体的な値を代入して得られる解を**特殊解**（または特解）という。

Particular solution

例1 $$y' = -y \qquad (1.1)$$
の一般解は

$$y = C\exp(-x)$$

であり、1個の任意定数Cを含む。

たとえば、$C = 1$を代入して得られた解 $y = \exp(-x)$ は特殊解の例である。

例2 $$y'' = -y \qquad (1.2)$$
の一般解は

$$y = C_1 \cos x + C_2 \sin x$$

であり、2個の任意定数C_1, C_2を含む。

たとえば、$C_1 = 1$, $C_2 = 0$を代入して得られた解 $y = \cos x$ は特殊解の例である。

特異解

- 微分方程式の一般解の任意定数にどのような値を入れても得られない解を**特異解**という。 Singular solution
  - 特殊解とは違う概念。

例 $y'^2 = 4y$
の一般解は、 $y = (x - C)^2$ である（ただしCは任意定数）。
一方、$y = 0$も、上記の微分方程式の解であるが、一般解のCにどのような値を代入しても$y = 0$とはならない。この$y = 0$のような解を特異解という。

1.4 初期条件と境界条件

- 独立変数 x の1つの値 X に対して、$(y, y', y'', \ldots, y^{(n-1)})$ の値を与える条件

$$\left(y(X), y'(X), y''(X), \ldots, y^{(n-1)}(X)\right) = \left(Y, Y', Y'', \ldots, Y^{(n-1)}\right)$$

を、**初期条件**という。 Initial condition

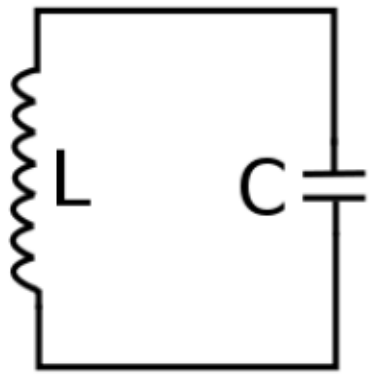
– その条件を満たす特殊解を求める問題を**初期値問題**という。

Initial value problem

初期値問題

- ***n*階**微分方程式の**一般解**は、***n*個**の任意定数$C_1 - C_n$を含んでいる。
  - $(y(X), y'(X), y''(X), \ldots, y^{(n-1)}(X))$の値を$(Y, Y', Y'', \ldots, Y^{(n-1)})$と与えれば、未知量$n$個に対し方程式$n$本となり、よって任意定数が一意に決定できる.
  - 時間的変化を扱う問題に頻繁に登場する。

例: 時刻 $t = 0$ におけるコンデンサ(容量C)両端の電圧とCに流れ込む電流を与えて、自己インダクタンスLのコイルとコンデンサの直列回路の電圧変化を求める、など。



境界条件

- 独立変数 x の複数の値 $X_1, X_2, \ldots, X_n$に対する $(y, y', y'', \ldots, y^{(n)})$ の値を与える条件(式はn個)を**境界条件**という。 Boundary condition
  - たとえば、関数の値を与える場合

$$\left(y\left(X_1\right), y\left(X_2\right), y\left(X_3\right), \ldots, y\left(X_n\right)\right) = \left(Y_1, Y_2, Y_3, \ldots, Y_n\right)$$

を与える。

  - その条件を満たす特殊解を求める問題を**境界値問題**という。

Boundary value problem

例題1.1

1階微分方程式(1.1)を、$x = 0$のとき$y = y(0) = 1$の初期条件で解く

(解)　1階微分方程式(1.1)の一般解

$$y = C\exp(-x)$$

に初期条件を代入すると、

$$C = 1$$

となる。よって

$$y = \exp(-x)$$

がその初期条件での特殊解となる。 ■

例題1.2

2階微分方程式(1.2)を、$x = 0$のとき $y = y(0) = 1$ および $x = (\pi/2)$のとき $y = y(\pi/2) = 0$ の2つの境界条件で解く

(解)　2階微分方程式(1.2)の一般解

$$y = C_1 \cos x + C_2 \sin x$$

に2つの境界条件を代入する。

$x = 0$のとき $\sin x = 0$であるので、$C_1 = 1$となる。また $x = (\pi/2)$のとき $\cos x = 0$であるので$C_2 = 0$となる。

よって、$y = \cos x$ が与えられた境界条件での特殊解となる。

1.5 積分法の復習

- 微分方程式に対して、式の変形、微分法および積分法を有限回用いることによって解を求める方法を**求積法**という。

  quadrature

  – 残念ながら、一般に、1階常微分方程式でさえ、求積法で解が得られるとは限らない。
  – しかし、工学上の多くの問題で、1階常微分方程式に対し、積分操作が有効なことが多い。

- そこで、関数の積分を復習しよう。

置換積分

- uがxの関数であるとき、

$$\int f(u)\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}\mathrm{d}x = \int f(u)\mathrm{d}u$$

Integration by substitution

部分積分

- 2つの関数 $f(x)$, $g(x)$ に関して

$$\int f'(x)g(x)\mathrm{d}x = f(x)g(x) - \int f(x)g'(x)\mathrm{d}x$$

Integration by parts

例題1.3

$\int \frac{x}{1+x^2}\mathrm{d}x$ を求める。

（解） $x^2+1=u$とおくと、$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=2x$ であるので

$$\int \frac{x}{1+x^2}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int \frac{1}{u}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int \frac{1}{u}\mathrm{d}u=\frac{1}{2}\log_{\mathrm{e}}|u|+C$$

$$=\frac{1}{2}\log_{\mathrm{e}}\left(x^2+1\right)+C$$

となる。ただしCは任意定数である。

原始関数 Primitive function

- 関数 f の原始関数とは、導関数が f となる関数をいう。
  - すなわち、f の原始関数を F とすると

$$\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}x} = f$$

  - あるいは

$$F = \int f\left(x\right)\mathrm{d}x + C$$

導関数 derivative

自然対数 Natural logarithm

- 関数 $(1/u)$の原始関数は、底をeとする対数関数、すなわち自然対数 $\log_e |u|$となる。
  - 今後、本講義に登場する対数関数は全て自然対数であるので、底のeは省略して$\log |u|$と記述する。
    - $\ln |u|$と記述することもある。
  - なお、対数関数の引数は正であるため、uに絶対値をつけておくことに注意。
    - uが負の場合も$\log |u|$を微分すれば$(1/u)$

Cf. 常用対数 common logarithm

例題1.4

$\int x\log x\mathrm{d}x$ を求める。

(解)

$$\int x\log x\mathrm{d}x = \int\left(\frac{1}{2}x^2\right)'\log x\mathrm{d}x = \frac{1}{2}x^2\log x - \frac{1}{2}\int x^2\left(\log x\right)'\mathrm{d}x$$

$$= \frac{1}{2}x^2\log x - \frac{1}{2}\int x^2\frac{1}{x}\mathrm{d}x = \frac{1}{2}x^2\log x - \frac{1}{2}\int x\mathrm{d}x$$

$$= \frac{1}{2}x^2\log x \boxed{-\frac{1}{4}x^2} + C$$

となる。ただしCは任意定数である。

1.6 関数のべき級数展開の復習

- べき(冪)級数 $\sum_{n=0}^{\infty} A_n x^n$ が $|x| < \rho$ の範囲(これを**収束域**という)で 収束するとき、ρ を**収束半径**という。

  Power series

  Radius of convergence

  – これを求める方法として以下の2つがある

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{A_{n+1}}{A_n}\right| = \frac{1}{\rho}$$

D'Alembert's ratio test

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{A_n} = \frac{1}{\rho}$$

Cauchy ratio test

  – 収束域では、**項別微分**、**項別積分**が可能である。

Termwise differentiation and integration

マクローリン展開 Maclaurin expansion

- 関数 $f(x)$ のマクローリン展開（または$x = 0$におけるテーラー展開）は次式で与えられる。

Taylor expansion

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{1}{2!}f''(0)x^2 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$$

- これは、関数 $f(x)$ をべき級数展開したものであり、x^nの項の係数A_nは

$$\frac{f^{(n)}(0)}{n!}$$

で与えられる。

例題1.5

$\dfrac{1}{1+x}$ を$x=0$においてテーラー展開し、この収束域を求める。

(解) $f(x)=\dfrac{1}{1+x}=(x+1)^{-1}$ とおく。

$f'(x)=-(x+1)^{-2},\ f''(x)=2(x+1)^{-3},\ldots$ となり、

$f^{(n)}(x)=n!(-1)^n(x+1)^{-(n+1)}$ が得られる。

従って $f^{(n)}(0)=n!(-1)^n$ となり、テーラー展開は

$$\frac{1}{1+x}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n$$

となる。$A_n=(-1)^n$ より、$\dfrac{1}{\rho}=\lim_{n\to\infty}\left|\dfrac{A_{n+1}}{A_n}\right|=\lim_{n\to\infty}|-1|=1$

となる。よって収束域は$|x|<1$となる。

2. 変数分離形

目標

- 変数分離形の意味が理解できる
- 変数分離形の解き方を理解できる
- 1階微分方程式の一般解には1つの任意定数が含まれることを理解している
- $\mathrm{d}y/\mathrm{d}x = f(Ax + By + C)$の形が解ける

2.1 変数分離形とは

- 1階の導関数 $y' = \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ がxだけの関数$f(x)$とyだけの関数$g(y)$の積の形で与えられた1階微分方程式を変数分離形という。

$$y' = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = f\left(x\right)g\left(y\right) \tag{2.1}$$

Variable separable

2.2 変数分離形の解き方

- $g(y) \neq 0$とし、式(2.1)の両辺を$g(y)$で割ると

$$\frac{1}{g(y)}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = f(x)$$

となる。この両辺を x で積分すると

$$\int \frac{1}{g(y)}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\mathrm{d}x = \int f(x)\mathrm{d}x$$

- すなわち $\displaystyle\int \frac{1}{g(y)}\mathrm{d}y = \int f(x)\mathrm{d}x + C$ (2.2)

となる。

変数分離 Separation of variables

- 式(2.2)の左辺はyだけの関数、右辺はxだけの関数
  - この操作を変数分離という
- 式(2.2)の両辺の積分を行えば、一般解が求められる。
  - なお、左辺と右辺をそれぞれ積分すれば、それぞれから任意定数C_yとC_xがててくるが、左辺の任意定数C_yを右辺へ移行すれば1つの任意定数$C\ (= C_x - C_y)$にまとめることができる。

場合分けのもう一方 $g(y) = 0$

- $g(y) = 0$の場合は、1階微分方程式(2.1)が

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 0$$

となるので、その一般解は $y = C$ (定数) となる。

- 式(2.1)は1階微分方程式であるので、その一般解(2.2)は1つの任意定数Cを含む。
  - $(C_x - C_y)$などと書かないように。これだと2つあるように見えてしまうが、実質は1つ。

例題2.1

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = Ay \qquad (2.3)$$

を解く。ただし、Aは定数である。

(解) $y \neq 0$として両辺をyで割ると $\frac{1}{y}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = A$

となる。この両辺をxで積分すると

$$\int \frac{1}{y}\mathrm{d}y = \int A\,\mathrm{d}x + C_0 \quad \text{すなわち} \quad \log|y| = Ax + C_0$$

ここに、C_0は任意定数である。変形すると

$$|y| = \exp\left(Ax + C_0\right) = \exp C_0 \exp\left(Ax\right)$$

すなわち $y = C\exp\left(Ax\right)$ (2.4)

なお、$C = \pm \exp C_0$とおいた。また、$y = 0$は式(2.4)で$C = 0$としたときの特殊解である。

以上まとめると、微分方程式(2.3)の一般解は$y = C\exp(Ax)$である。ただし、Cは任意定数である。

例題2.2 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = xy$ (2.5) を解く。

(解) $y \neq 0$として両辺をyで割ると $\dfrac{1}{y}\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = x$

となる。この両辺をxで積分すると

$$\int \frac{1}{y}\mathrm{d}y = \int x\,\mathrm{d}x + C_0 \quad \text{すなわち} \quad \log|y| = \frac{1}{2}x^2 + C_0$$

ここに、C_0は任意定数である。変形すると

$$|y| = \exp\left(\frac{1}{2}x^2 + C_0\right) = \exp C_0 \exp\left(\frac{1}{2}x^2\right)$$

すなわち$y = C\exp\left(\dfrac{1}{2}x^2\right)$ (2.6)

なお、$C = \pm \exp C_0$とおいた。また、$y = 0$は式(2.6)で$C = 0$としたときの特殊解である。

以上まとめると、微分方程式(2.3)の一般解は $y = C\exp\left(\dfrac{1}{2}x^2\right)$ である。ただし、Cは任意定数である。

例題2.3 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = y(y+1)$ を解く。

(解) $y \neq 0, -1$として両辺を$y(y+1)$で割ると $\dfrac{1}{y(y+1)}\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 1$

となる。この両辺をxで積分すると

$\displaystyle\int \frac{1}{y(y+1)}\mathrm{d}y = x + C_0$ となる。ここに、C_0は任意定数である。

左辺の被積分関数は $\dfrac{1}{y(y+1)} = \dfrac{1}{y} - \dfrac{1}{y+1}$

と部分分数分解できるので $\displaystyle\int \frac{1}{y}\mathrm{d}y - \int \frac{1}{y+1}\mathrm{d}y = x + C_0$

すなわち $\log|y| - \log|y+1| = x + C_0$, $\therefore \log\left|\dfrac{y}{y+1}\right| = x + C_0$

よって $\left|\dfrac{y}{y+1}\right| = \exp(x + C_0) = \exp C_0 \exp x$

従って $\dfrac{y}{y+1} = C\exp x$ ただし$C = \pm\exp C_0$とおいた。

例題2.3 つづき

- さらに変形すると $y = \dfrac{C\exp x}{1 - C\exp x}$ となる。
  - この式において、$C = 0$とおくと $y = 0$となる。
  - また、$C = \pm\infty$とおくと $y = \dfrac{\exp x}{\dfrac{1}{C} - \exp x} = -1$ であるので、$y = -1$ となる。
  - それゆえ、先の一般解に $y = 0, -1$も含まれている。

- なお、$y = \ldots$の形にまでしなくとも、$\dfrac{y}{y+1} = C\exp x$ のように、yの導関数を含まない方程式の形で解答としてよい。

2.3 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = f\left(Ax + By + C\right)$ の形の解き方

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = f\left(Ax + By + C\right) \tag{2.7}$$

の形で表される微分方程式は、以下の手順で変数分離形へ変形できる。

$$u = Ax + By + C$$

とおき、両辺をxで微分すると $\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = A + B\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$

となる。

2.3 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = f\left(Ax + By + C\right)$ つづき

これに式(2.7)を代入すると $\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = A + Bf\left(u\right)$ となる。

この式は以下のように変数分離形に変形できる。

$$\frac{1}{A + Bf\left(u\right)}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = 1$$

例題2.4

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = x + y + 1 \qquad (2.8)$$

を解く。

(解) $u = x + y + 1$とおき、両辺をxで微分すると $\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = 1 + \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$

となる。これに式(2.8)を代入すると

$\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} - 1 = u$ すなわち $\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = 1 + u$ となる。

$u \neq 1$のとき、両辺を$u + 1$で割ると $\dfrac{1}{u+1}\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = 1$となる。この両辺を$x$で積分すると

$\displaystyle\int \frac{1}{u+1}\mathrm{d}u = \int \mathrm{d}x + C_0$ すなわち $\log|u + 1| = x + C_0$となる。

ここに、C_0は任意定数である。これより

$|u + 1| = \exp(x + C_0) = \exp C_0 \exp x, \ \therefore u + 1 = C \exp x$

ただし$C = \pm \exp C_0$とおいた。

例題2.4　つづき

$u=-1$ は、この式において $C=0$ としたときの特殊解である。

$u=x+y+1$ を代入すると

$$\left(x+y+1\right)+1=x+y+2=C\exp x$$

$$\therefore\quad y=C\exp x-x-2$$

注意：uは自分で勝手においたものだから、
必ず最後は元に戻し, xとyで解答すること。

まとめ:本日の確認事項

- 微分方程式の階数の意味が理解できる
- 方程式の線形・非線形の違いが理解できる
- 方程式の斉次・非斉次の違いが理解できる
- 一般解・特殊解の違いが理解できる
- 初期条件・境界条件の意味が理解できる
- 変数分離形の意味が理解できる
- 変数分離形の解き方を理解できる
- 1階微分方程式の一般解には1つの任意定数が含まれることを理解している
- $\mathrm{d}y/\mathrm{d}x = f(Ax + By + C)$の形が解ける