

## 解析学 理解度の確認 (2) 解答例

### 問題 1.

(1) コーシーの積分定理を述べよ. (配点: 5点 +  $\alpha$ (証明))

(解答例)

関数  $f(z)$  が正則な領域内に存在する単一閉曲線  $C$  に対して,  $\int_C f(z) dz = 0$  が成り立つ.

(2) コーシーの積分公式の導出について, 次の問いに答えよ.

(a) 複素平面上の点  $z_0$  を中心とする半径  $r$  の円を積分路  $C: |z - z_0| = r$  ( $r > 0$ ) とするとき, 積分路  $C$  を, 媒介変数を用いて式で示せ. (配点: 5点)

(解答例)

$$\underline{C: z(\theta) = z_0 + re^{i\theta} \quad (0 \leq \theta \leq 2\pi)} \quad \text{ただし, 媒介変数を } \theta \text{ とした.}$$

(b) 閉曲線  $C$  とその内部を含む領域で関数  $f(z)$  が正則であるとき, (a) の積分路  $C$  で

$\int_C \frac{f(z)}{z - z_0} dz$  を計算し, 最後に  $r \rightarrow 0$  とすることで, その値を  $z_0, f(z)$  等を用いて式で示せ. (配点: 10点)

(解答例)

$$z(\theta) = z_0 + re^{i\theta} \quad (0 \leq \theta \leq 2\pi) \quad \text{より, } dz = ire^{i\theta} d\theta$$

よって積分変数  $z$  を  $\theta$  に変数変換して, 積分路  $C$  に沿った周回積分を実行すると,

$$\int_C \frac{f(z)}{z - z_0} dz = \int_0^{2\pi} \frac{f(z_0 + re^{i\theta})}{re^{i\theta}} ire^{i\theta} d\theta = i \int_0^{2\pi} f(z_0 + re^{i\theta}) d\theta$$

ここで  $r \rightarrow 0$  の極限を取ると

$$\lim_{r \rightarrow 0} \int_C \frac{f(z)}{z - z_0} dz = \lim_{r \rightarrow 0} i \int_0^{2\pi} f(z_0 + re^{i\theta}) d\theta = i \int_0^{2\pi} f(z_0) d\theta = 2\pi i f(z_0)$$

ここで  $f(z_0)$  は積分変数  $\theta$  によらない定数だから積分の外に出した.

よって  $\underline{2\pi i f(z_0)}$  (答)

## 問題 2.

(1) 関数  $f(z) = \bar{z}$  を, 点 0 から点  $1+i$  まで下に示す積分路に沿って複素積分せよ.

(a) 積分路  $C_a$ : 点 0 と点  $1+i$  を結ぶ線分 (配点: 5 点)

(解答例)

媒介変数を  $t$  とおくと  $z(t) = (1+i)t$  ( $0 \leq t \leq 1$ ) よって  $dz = (1+i)dt$ .

また,  $f(z) = \bar{z} = (1-i)t$  なので,

$$\int_{C_a} f(z)dz = \int_0^1 (1-i)t(1+i)dt = \int_0^1 2t dt = \left[ t^2 \right]_0^1 = 1$$

(b) 積分路  $C_b$ : 放物線  $y^2=x$  の点 0 から  $1+i$  まで (配点: 5 点)

(解答例)

$y=t$  とおくと,  $x=t^2$

これより  $z(t) = x + iy = t^2 + it$  ( $0 \leq t \leq 1$ ) よって,  $dz = (2t + i)dt$ .

また,  $f(z) = \bar{z} = t^2 - it$  なので,

$$\int_{C_b} f(z)dz = \int_0^1 (t^2 - it)(2t + i)dt = \int_0^1 (2t^3 - it^2 + t)dt = \left[ 2\frac{t^4}{4} - i\frac{t^3}{3} + \frac{t^2}{2} \right]_0^1 = 1 - \frac{i}{3}$$

積分路によって積分値が異なるのは,  $\bar{z}$  が正則ではないため.

(2)  $f(z) = \frac{1}{z}$  を, 中心  $z=1$  でテーラー展開し, 続いて収束半径を求めよ. (配点: 10 点)

(解答例)

テーラー展開の式を使っても求められるが, ここでは等比級数の式を使った方法を示す.

中心  $z=1$  であることから,  $(z-1)$  を公比とする等比級数を構成しようとする.

$f(z) = \frac{1}{z} = \frac{1}{1+(z-1)}$  ここに等比級数の式  $\frac{1}{1+r} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n r^n$  を適用すると

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (z-1)^n$$

等比級数が収束するための条件は  $r < 1 \Leftrightarrow |z-1| < 1$  より収束半径は 1

(3)  $f(z) = \frac{1}{z^2 - 1}$  を、 $z=1$  を中心として、 $|z-1| > 2$  の範囲でべき級数展開せよ。

(配点: 10 点)

(解答例)

$|z-1| > 2$  の条件から、両辺の逆数を取って2倍すると、 $\Leftrightarrow \left| \frac{2}{z-1} \right| < 1$

よって  $2/(z-1)$  を「公比」とする等比数列の和(の極限= $1/(1+r)$ )を引き出そうと考える。

$$f(z) = \frac{1}{(z-1)(z+1)} = \frac{1}{(z-1)^2} \frac{1}{1 + \frac{2}{z-1}} \quad z=1 \text{ を中心とした展開を考えているから、最後}$$

には  $(z-1)$  のべき乗項の和になるので、分母の  $(z-1)$  の項には手をつけない。もう一方の  $(z+1)$  の方を変形して「公比」を引き出そうと考える。その結果、上の式のような形にたどり着く。よって最後の項に等比級数の式を適用すると

$$f(z) = \frac{1}{(z-1)^2} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left( \frac{2}{z-1} \right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-2)^n}{(z-1)^{n+2}}$$

(4) べき級数  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{5^n}{n+1} z^n$  の収束半径を求めよ。(配点: 10 点)

(解答例)

ダランベールの評価式を用いると

$$\frac{1}{R} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{5^{n+1}}{n+2} \frac{n+1}{5^n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( 5 \frac{n+1}{n+2} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( 5 \frac{1+1/n}{1+2/n} \right) = 5$$

より、収束半径  $R$  は  $\underline{1/5}$

### 問題 3.

(1) 積分路  $C$  が、中心  $z=1$ 、半径 2 の円のとき、積分  $\int_C \frac{2z+1}{z^2+z-1} dz$  を計算せよ。

(配点: 10 点)

(解答例)

被積分関数を部分分数分解すると  $\frac{2z+1}{z^2+z-2} = \frac{2z+1}{(z+2)(z-1)} = \frac{1}{z+2} + \frac{1}{z-1}$

積分路  $C$  の内側の特異点は  $z=1$  のみである。

最右辺第2項に対してコーシーの積分公式  $f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(z)}{z-z_0} dz$  で  $f(z)=1$  に相当するから

ら  $f(z_0)=1$  により, 積分値は  $z_0$  によらず  $2\pi i$  になる, と考えても良いし, 一位の極の留数に

よる求め方をしても  $\text{Res}(1) = \lim_{z \rightarrow 1} \left\{ (z-1) \frac{2z-1}{(z+2)(z-1)} \right\} = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{2z+1}{z+2} = 1$  だから,

積分値  $= 2\pi i \times \text{留数} = 2\pi i$  としても同じ答えが得られる.

(2) 積分路  $C$  が, 中心  $z=0$ , 半径  $2$  の円するとき, 積分  $\int_C \frac{e^z}{(z-1)^4} dz$  を計算せよ.

(配点: 10点)

**(解答例1: 留数を使う方法)**

積分路  $C$  内の特異点は  $z=1$  のみで, 4位の極であるから  $m=4$  として留数を求める式を使うと, まず被積分関数に  $(z-1)^4$  を乗じて3回微分すると  $e^z$ .  $z \rightarrow 1$  として  $3!$  で割り算すると

$\text{Res}(1)=e/6$  よって積分の値は留数に  $2\pi i$  を乗じて  $\underline{\pi ei/3}$  (答)

**(解答例2: グルサの公式を使う方法)**

グルサの公式  $f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i} \int_C \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}} dz$  で  $n=3, f(z)=e^z$  とおくと,

$$f^{(3)}(z) = \frac{3!}{2\pi i} \int_C \frac{f(z)}{(z-1)^4} dz \Leftrightarrow \int_C \frac{f(z)}{(z-1)^4} dz = \frac{2\pi i}{6} f^{(3)}(1)$$

$f(z)=e^z$  の3回微分は  $f^{(3)}(z)=e^z$  だから,  $f^{(3)}(1)=e^1=e$  よって積分値は  $\underline{\frac{\pi ei}{3}}$  (答)

(解答例1)と(解答例2)は限りなく同じことをやっていることがわかる.

**(解答例3: 級数展開によって極の位数を確認し, あわせて, 直接留数を求める方法)**

被積分関数をローラン展開する. そのためにまず  $e^z$  を  $z=1$  を中心にテーラー展開する.

$$e^u \text{ のマクローリン展開は } e^u = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{u^n}{n!} \quad \text{ここに } u=z-1 \text{ を代入すると } e^{z-1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-1)^n}{n!}$$

$$\text{(両辺に } e \text{ を掛けて)} \Leftrightarrow e^z = e \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-1)^n}{n!} = e + e(z-1) + \frac{e(z-1)^2}{2!} + \frac{e(z-1)^3}{3!} + \frac{e(z-1)^4}{4!} + \dots$$

よって、 $\frac{e^z}{(z-1)^4} = e \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-1)^{n-4}}{n!} = \frac{e}{(z-1)^4} + \frac{e}{(z-1)^3} + \frac{e}{2!(z-1)^2} + \frac{e}{3!(z-1)} + \frac{e}{4!} + \dots$

ここから、被積分関数が 4位の極 であることが確認され、あわせて、 $(z-1)^{-1}$  の係数である留数が  $e/6$  であることがわかる。

(3) 積分  $\int_0^{2\pi} \frac{\cos\theta}{5-4\cos\theta} d\theta$  を計算せよ. (配点: 10点)

(解答例)

積分路を複素平面上の単位円  $C: |z|=1$  にとり媒介変数表示すると  $z=e^{i\theta}$  ( $0 \leq \theta \leq 2\pi$ )

すると、 $\cos\theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} = \frac{1}{2} \left( z + \frac{1}{z} \right)$  と表されるので、これを与式に代入. さらに

$dz = ie^{i\theta} d\theta = iz d\theta \Leftrightarrow d\theta = \frac{dz}{iz}$  を用いて積分変数を変換すると、求める積分 =

$$\int_C \frac{\frac{1}{2} \left( z + \frac{1}{z} \right)}{5 - 4 \frac{1}{2} \left( z + \frac{1}{z} \right)} \frac{1}{iz} dz = \int_C \frac{z^2 + 1}{10z - 4z^2 - 4} \frac{1}{iz} dz = \int_C \frac{z^2 + 1}{z(z-2)(z-1/2)} \frac{1}{(-4i)} dz$$

積分路  $C$ (単位円)内の特異点は  $z=0$  と  $1/2$  で1位の極. 留数を求めると

$$\text{Res}(0) = \frac{1}{-4i}, \text{ および, } \text{Res}(1/2) = (-5/3) \times \frac{1}{-4i} = \frac{5}{12i}$$

$$\text{よって積分値} = 2\pi i \left( \frac{1}{-4i} + \frac{5}{12i} \right) = 2\pi \times \frac{2}{12} = \underline{\underline{\frac{\pi}{3}}}$$
 (答)

(4) 積分  $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(x^2+1)^2} dx$  を計算せよ. (配点: 10点)

(解答例 1)

被積分関数を  $f(z)$  とおくと、 $f(z) = \frac{1}{(z^2+1)^2} = \frac{1}{(z-i)^2(z+i)^2}$  すなわち、

複素平面の 上半面 にある特異点は  $z=i$  のみであり、これは2位の極である。

留数を求めると、 $f(z)$ に $(z-i)^2$ を乗じて $\frac{1}{(z+i)^2}$ ．これを1回微分して $\frac{-2}{(z+i)^3}$ ，

$z \rightarrow i$  とすると、 $\frac{-2}{(2i)^3} = \frac{1}{4i}$ ．よって半円状の周回積分の値は $2\pi i \times \frac{1}{4i} = \frac{\pi}{2}$ ... (☆)

一方、半径  $R$  の半円状の円弧  $S$  に沿った線積分の値を調べると、 $z = Re^{i\theta}$  とおいて、また、

$dz = iRe^{i\theta} d\theta$  より、 $\int_S f(z) dz = \int_0^{2\pi} \frac{iRe^{i\theta}}{(R^2 e^{i2\theta} + 1)^2} d\theta$  となる． $|ie^{i\theta}| = |e^{i\theta}| = 1$  であ

り、分母の  $R$  の次数は分子の  $R$  の次数より 2 以上大きいので、 $R \rightarrow \infty$  で被積分関数は 0 になり、その結果、(不定積分が定数になるので) 定積分の値  $\rightarrow 0$  が保証される．この結果、求め

る実積分は先に留数から求めた通り(☆)となる．すなわち、 $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(x^2 + 1)^2} dx = \frac{\pi}{2}$  (答)

### (解答例 2)

本講義の主題とは直接関係ないが、(残念ながら?) 本問の積分は複素関数を使わずとも、実関数のまま、 $x = \tan \theta$  の変数変換で解くことができってしまうので、参考までに別解として示しておく．式変形に使う三角関数の式を下記に挙げておく．(必要に応じて導出できるようにしておくこと．)

$$\cos^2 \theta = \frac{1 + \cos 2\theta}{2}, \quad 1 + \tan^2 \theta = \frac{1}{\cos^2 \theta}, \quad (\tan \theta)' = \frac{1}{\cos^2 \theta}$$

まず  $x = \tan \theta$  と変数変換すると、 $1 + x^2 = 1 + \tan^2 \theta = \frac{1}{\cos^2 \theta}$ ， $dx = \frac{1}{\cos^2 \theta} d\theta$

$$\text{より、} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(x^2 + 1)^2} dx = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^4 \theta \frac{1}{\cos^2 \theta} d\theta = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 \theta d\theta$$

$\cos^2 \theta = \frac{1 + \cos 2\theta}{2}$  を使って  $\cos$  の次数を下げると

$$\begin{aligned} &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 + \cos 2\theta}{2} d\theta = \frac{1}{2} [t]_{-\pi/2}^{\pi/2} + \frac{1}{2} \left[ \frac{\sin 2\theta}{2} \right]_{-\pi/2}^{\pi/2} \\ &= \frac{\pi}{2} \quad (\text{答}) \end{aligned}$$

$\boxed{=0}$