

解析学(複素解析) 理解度の確認 (2)

答案用紙に学籍番号, 氏名, 問題番号を明記. 裏面使用可. 計算過程を重視する.

問題 1.

- (1) コーシーの積分定理を述べよ. (証明は必要ないが, 証明にまで言及があれば加点対象とする.)
- (2) コーシーの積分公式の導出について, 次の問いに答えよ.

- (a) 複素平面上の点 z_0 を中心とする半径 r の円を積分路 $C: |z-z_0|=r$ ($r>0$) とするとき, 積分路 C を, 媒介変数を用いて式で示せ.
- (b) 閉曲線 C とその内部を含む領域で関数 $f(z)$ が正則であるとき, (a) の積分路 C で

$$\int_C \frac{f(z)}{z-z_0} dz \text{ を計算し, 最後に } r \rightarrow 0 \text{ とすることで, その値を } z_0, f(z) \text{ 等を用いて式}$$

で示せ. (定理・公式を使って求めるのではなく, (a) の積分路で線積分を実際に行うことにより求めてください. 計算過程を重視します.)

問題 2.

- (1) 関数 $f(z) = \bar{z}$ を, 点 0 から点 $1+i$ まで, 次に示す積分路に沿って複素積分せよ.

- (a) 積分路 C_a : 点 0 と点 $1+i$ を結ぶ線分
- (b) 積分路 C_b : 放物線 $y^2=x$ の点 0 から $1+i$ まで(ヒント: $y=t$ とおく)

- (2) $f(z) = \frac{1}{z}$ を, 中心 $z=1$ でテーラー展開し, 続いて収束半径を求めよ.

- (3) $f(z) = \frac{1}{z^2-1}$ を, $z=1$ を中心として, $|z-1|>2$ の範囲でべき級数展開せよ.

- (4) べき級数 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{5^n}{n+1} z^n$ の収束半径を求めよ.

→裏面に 問題 3

問題 3. (どのように解いてもかまいませんが計算過程を示してください)

(1) 積分路 C が, 中心 $z=1$, 半径 2 の円するとき, 積分 $\int_C \frac{2z+1}{z^2+z-2} dz$ を計算せよ.

(2) 積分路 C が, 中心 $z=0$, 半径 2 の円するとき, 積分 $\int_C \frac{e^z}{(z-1)^4} dz$ を計算せよ.

(3) 積分 $\int_0^{2\pi} \frac{\cos\theta}{5-4\cos\theta} d\theta$ を計算せよ.

(4) 積分 $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(x^2+1)^2} dx$ を計算せよ.

【参考】

$$\operatorname{Res}(f, z_0) = \frac{1}{(m-1)!} \lim_{z \rightarrow z_0} \left\{ \frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}} (z - z_0)^m f(z) \right\}$$

$$f(z)=h(z)/g(z), \{g(z_0)=0, g'(z_0) \neq 0\} : \operatorname{Res}(f, z_0)=h(z_0)/g'(z_0)$$